四川理工学院课程实施大纲

课程名称：模糊数学

授课班级：应数 2013 级 1,2 班

任课教师：卢天秀

工作部门：理学院

联系方式：13408138464

四川理工学院 制

2016 年 1 月

《模糊数学》课程实施大纲

基本信息

课程代码：

课程名称：模糊数学

学　　分：2

总 学 时：30

学　　期：2015-2016 下期

上课时间：1-8 周，周一上午 1,2 节，周三上午 3,4 节。

上课地点：N1-413，N1-321

答疑时间和方式：每周二下午当面答疑；随时可以电话、短信、邮件、QQ 答疑。

答疑地点：厚德楼 325

授课班级：应数 2013 级 1,2 班

任课教师：卢天秀

学　　院：理学院

邮　　箱：lubeeltx@163.com

联系电话：13408138464

目　录

教学理念

1、　以人为本。重视教育对象，尊重教育对象，爱护教育对象，赏识教育对象，提升和发展人的精神文化品质。公平对待每一个学生，不以个人的私利和好恶为标准。

2、　全面发展。注重学生知识结构的完整性和全面性，在学习专业知识的同时，提高思想道德素质和文化素质。

3、　素质教育。更加注重教育的过程，将传授知识和培养创造性思维结合，通过点拨、启发、引导和训练，挖掘学生的潜力，提高主观能动性。培养学生的自学能力、实践能力、创新能力。

教师简介

卢天秀，四川理工学院副教授，博士研究生。1998 年在重庆师范大学数学与计算机系本科毕业；2010 年电子科技大学数学科学学院硕士毕业，研究方向为拓扑学及其应用；2013 年电子科技大学数学科学学院博士毕业，研究方向为混沌理论及其应用。从事教学工作 18 年来，担任过《数学分析》、《高等代数》、《概率论与数理统计》、《近世代数》、《初等数论》、《离散数学》《模糊数学》、《组合数学》、《拓扑学》、《线性代数》、《高等数学》、《高代选讲》等课程的教学。

课程介绍

1、 课程的性质

《模糊数学》是数学专业的一门选修课，也是一门重要的专业基础理论课，它是为培养我国社会主义现代化建设所需要的高质量人才服务的。模糊数学打破了以二值逻辑为基础的传统思维，使模糊推理成为严格的数学方法。

2、 课程在学科专业结构中的地位、作用

各门学科，尤其是“软科学”的数学化、定量化趋向把模糊性的数学处理问题推向中心地位。更重要的是，随着电子计算机、控制论、系统科学的迅速发展，要使计算机能像人脑那样对复杂事物具有识别能力，就必须研究和处理模糊性。

我们研究人类系统的行为，或者处理可与人类系统行为相比拟的复杂系统，如航天系统、人脑系统、社会系统等，参数和变量甚多，各种因素相互交错，系统很复杂，它的模糊性也很明显。从认识方面说，模糊性是指概念外延的不确定性，从而造成判断的不确定性。

模糊数学是运用数学方法研究和处理模糊性现象的一门数学新分支。它以“模糊集合”论为基础。模糊数学提供了一种处理不肯定性和不精确性问题的新方法，是描述人脑思维处理模糊信息的有力工具。它既可用于“硬”科学方面，又可用于“软”科学方面。

3、 学习本课程的必要性

人与计算机相比，一般来说，人脑具有处理模糊信息的能力，善于判

断和处理模糊现象。但计算机对模糊现象识别能力较差，为了提高计算机识别模糊现象的能力，就需要把人们常用的模糊语言设计成机器能接受的指令和程序，以便机器能像人脑那样简洁灵活的做出相应的判断，从而提高自动识别和控制模糊现象的效率。这样，就需要寻找一种描述和加工模糊信息的数学工具，这就推动数学家深入研究模糊数学。所以，学习模糊数学有助于科学研究与技术创新。

4、 课程教学要求

讲授本课程要贯彻“夯实基础，联系实际，培养能力，提高科研水平”的教育方针，依据“有用、有效、先进”的教改指导原则，重点放在培养学生的抽象概括能力、逻辑推理能力、实践能力和创新能力上，同时联系数学建模竞赛和建模课程进行教学。

通过本课程的学习，要求学生掌握模糊集的概念，模糊集与经典集合的异同；牢固掌握模糊集的运算；掌握分解定理与表现定理的内容，实质；学会模糊集合度量与模糊模式识别；理解模糊关系与模糊综合评价；能进行模糊聚类分析。通过以上内容的学习，使学生了解模糊数学与社会发展、经济发展、文化发展的关系。

先修课程

学习《模糊数学》这门学科，需要有一些基本的数学理论知识，若先修《数学分析》、《集合论》等课程，理解和掌握《模糊数学》课程中的概念和方法会更容易，对其中例子的理解会更加深入。

课程目标

讲授本课程要贯彻“拓宽视野，提高数学素养”的基本方针，依据“有用、有效、先进”的指导原则，对原教材要进行彻底清理，重点放在培养学生的抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力和创新能力上。

1、让学生了解模糊数学建立的背景和必要性。掌握崭新的思维方法，感受数学与现实生活的契合性。

2、掌握掌握基本概念；模糊集的运算；掌握分解定理与表现定理的内容；学会在数学建模中应用模糊模式识别、模糊关系与模糊综合评价和模糊聚类分析。

在教学方法上要做到：

1、加强对知识重点与难点的讲解，组织学生进行课堂讨论，促使学生对重点及难点的牢固掌握；

2、加强对学生自学能力的指导与培养；

3、培养学生发现问题，分析问题，解决问题的能力。

课程内容

1、　课程的内容概要

绪论

第一章　模糊集与运算

第二章　分解定理与表现定理

第三章　模糊集合度量与模糊模式识别

第四章　模糊关系与模糊综合评价

第五章　模糊聚类分析

2、　教学重点、难点

教学重点：模糊集与运算；分解定理与表现定理。通过本课程的学习，使学生掌握模糊数学的基本思想，基本理论，从而进一步运用模糊理论解决生活中的实际问题（如应用于数学建模上）。

教学难点：模糊模式识别；模糊关系与模糊综合评价；模糊聚类分析

3、学时安排

教学内容	课时数	合计
绪论	1 学时	30 学时
第一章 模糊集与运算	7 学时	
第二章 分解定理与表现定理	6 学时	
第三章 模糊集合度量与模糊模式识别	8 学时	
第四章 模糊关系与模糊综合评价	4 学时	
第五章 模糊聚类分析	4 学时	

课程实施

绪　论

教学日期：2016.2.29

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点、难点：说明为什么数学要研究模糊性，模糊性的本质是什么，如何产生的，以及模糊数学发展的过程及其在信息科学中的作用、意义。

教学内容

1、自然科学中的两种不确定性（30 分钟）

早在 17 世纪人们就开始对自然界中广泛存在的随机性进行研究，并逐步形成了概率论与数理统计学科。今天，它已经成为众多应用数学方法的重要基础，被广泛的应用于经济科学、军事科学、医疗科学、灾害预测与防止、管理科学、信息科学等方面。

随着人们对科学研究的不断深入，尤其是信息科学与技术的研究，一种新的不确定性使得人们无法回避，那就是模糊性，非结构性问题常常要涉及到自然语言信息的模糊性的处理。

什么是模糊性，它与随机性的区别？

随机性－－因事物因果关系的破缺引起的不确定性（多维空间事物到低维空间的把握）。

模糊性－－排中律的破缺引起的不确定性（描述事物的分类粗糙，分

类是人类认识事物的基本手段）。

模糊性问题的几个例子：

① 计算机模式识别问题（根据相貌特征识别人、汉字的识别、歌曲与艺术欣赏评价）；

② 智能控制问题（汽车停靠问题、搬运物体问题）；

③ 机器学习问题（学习骑自行车、解题证明问题）

④ 语言理解（秃子悖论，在专业概论中已经介绍过）；。

2、Zadeh 的互斥性原理及意义（30 分钟）

互斥原理："随着系统复杂性的增长，我们对其特性作出精确而有意义的描述能力相应的降低，直到达到一个阈值，一旦超过它，精确性和有意义性几乎成为两个互相排斥的特征"

互斥原理的意义：通过举例说明，①如气象预报精确到多少雨滴，温度精确到小数几十位等是无意义的；②国际一年的经济统计，精确到几分钱；③矿山岩石系统、采矿通风系统研究等。

3、模糊数学发展的历史与作用（20 分钟）

1965 年，美国著名控制论专家 L. A. Zadeh 教授在国际《信息与控制》杂志上发表了《模糊集合》（Fuzzy Sets）的论文，首次提出了模糊集合概念。

1976 年，中国文化大革命运动结束，模糊集合理论被介绍到中国。

模糊集合论在中国的发展过程。84 年中美高峰会议，Zadeh 教授的评价。

1987 年，日本模糊产品的商业化。

介绍机理模糊产品（模糊洗衣机，模糊空调，模糊电视机、模糊点钞

机、模糊复印机、模糊电话机)；模糊工程（美国的航天飞机对接技术，中国列车提速的控制、德国无人驾驶驱车的停靠、日本仙台地铁的自动控制、英国交通岗红绿灯智能控制等等）。

模糊数学发展现状：

形成分支（非经典集合论、模糊代数、模糊测度、模糊拓扑、模糊逻辑、模糊分析）。

应用主要限于模糊代数、文法和模糊逻辑。模糊分析与应用还有较大差距，这正是我们目前的工作。

讨论（10 分钟）

在实际生活中举出满足模糊性质的例子。

作业安排及课后反思

1、在网上查询有关模糊数学的参考书和文献，数学建模题目。

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了电子教案和文字教案（本课程实施大纲）。无其他特殊要求。

参考资料

[1] 张国立，张辉，孔倩. 模糊数学基础及应用. 化学工业出版社, 2011. 第一章

[2] 谢季坚. 模糊数学及其应用(第二版). 武汉：华中理工大学出版社, 2000. 第一章

第一章　模糊集与运算

教学日期：2016.2.29，2016.3.2，2016.3.7，2016.3.9

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点、难点：简要回顾经典集合的一些基本知识，着重强调在信息技术中集合如何表现概念。同时给出模糊集合的定义、模糊集合的运算与性质。

教学内容

§1－1 集合与概念（25 分钟）

自然语言是人类表达和交流思想的一种工具，语言交流本质上是概念的交流。智能信息处理技术研究的一项重要任务是如何使计算机理解人的自然语言。

概念
- 内涵－－概念对事物的特有属性的反映。
- 外延－－具有概念所反映的特有属性的那些事物的全体。

内涵与外延都可以表现概念。

概念的外延是一个集合，所以，集合可以表现概念。

§1－2 经典集合论回顾（70 分钟）

① 集合与论域、空集、幂集$\mathcal{P}$（X）；

② 元素与集合的关系；

③ 集合的运算与概念的复合；

④ 集合的特征函数，集合运算的特征函数。

论域 X 上的子集合 A 可以由其特征函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

唯一确定。

$\chi_A(x)$ 指明了 X 中的每个元素 x 与 A 的关系。在这里, 0 和 1 代表“是”和“非”的判断。$\chi_A(x)=1$ 说明对象 x 满足概念 A; 如果 $\chi_A(x)=0$, 说明对象 x 不满足概念 A.

设 $A,B\in$ P（X），定义

$$A = B \Leftrightarrow \chi_A(x)=\chi_B(x) \qquad \forall x\in X$$

$$A \supseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x)\geq\chi_B(x) \qquad \forall x\in X$$

$$\chi_{A\cup B}(x)= \chi_A(x)\vee\chi_B(x) \qquad \forall x\in X$$

$$\chi_{A\cap B}(x)= \chi_A(x)\wedge\chi_B(x) \qquad \forall x\in X$$

$$\chi_{A^C}(x) = 1-\chi_A(x) \qquad \forall x\in X$$

这里，$\chi_{A\cup B}(x)$，$\chi_{A\cap B}(x)$ 和 $\chi_{A^C}(x)$ 分别表示 A∪B, A∩B 和 AC(A 的余集)的特征函数，此处“∨”表示上确界，“∧”表示下确界，对 ∀ a，$b\in\{0,1\}$,有

$$a\vee b = \sup\{a,\ b\}, \qquad a\wedge b = \inf\{a,\ b\}.$$

⑤ 集合运算性质

由离散数学熟知，集合的并、交、余运算具有如下性质：

1) 幂等律 2) 交换律 3) 结合律 4) 吸收律

5) 分配律 6) 0 -1 律 7) 补余律 8) 复原律

9) 对偶律 （见书）

（集合代数，布尔代数，(P (X),∪,∩, c) 与 ({0,1},∨, ∧, c) 同构, 逻辑运算的电子实现）

§1—3 模糊概念与模糊集（100 分钟）

“秃子悖论”-----模糊概念的外延不明确，不能简单地用“是”和“非”的二值逻辑来判断对象与概念的关系。

一个很自然的方法是将元素对集合的隶属程度从{0，1}两种情况扩展到[0，1]实数区间无穷多值的情况。

（1）模糊集合的定义

定义 1 论域 X 上的模糊子集 A 是由映射

$$\mu_A \ : \ X \to [0,1]; \quad x \to \mu_A(x)$$

所确定，映射 μ_A 称为 A 的隶属函数，$\mu_A(x) \in [0,1]$表示元素 x 属于 A 的程度，或称 x 对 A 的隶属度。用 $\tilde{A}$、$\tilde{B}$、$\tilde{C}$ 等表示模糊集合，相应的隶属函数记为 $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

明确集合是模糊集合的特例，模糊集合是经典明确集合的拓广。

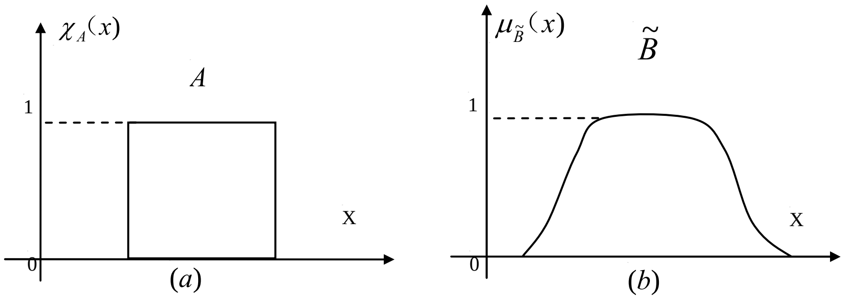


图 1 经典集合的特征函数（a）和模糊集合的隶属函数（b）

$\mathcal{F}$(X)表示论域 X 上的全体模糊集合，称为 X 的模糊幂集。由于经典集合是模糊集合的特例，因而有 P (X) ⊂ F (X).

若 Φ 是空集，$\forall x \in X$，有 $\mu_{\Phi}(x)=0$；就论域 X 而言，对于所有的 $x \in X$，自然有 $\mu_{\mathrm{X}}(x)=1$.

（2） 模糊集合的表示方法

设论域 $\mathrm{X}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$\tilde{A}$ 是论域 X 上的模糊集。

a) Zadeh 表示法

$$\tilde{A}=\mu_{\tilde{A}}(x_1)/x_1+\mu_{\tilde{A}}(x_2)/x_2+\cdots+\mu_{\tilde{A}}(x_n)/x_n$$

b）有序对表示法

$$\tilde{A}=\{(\mu_{\tilde{A}}(x_1),x_1),(\mu_{\tilde{A}}(x_2),x_2),\cdots,(\mu_{\tilde{A}}(x_n),x_n)\}$$

c) 向量表示法

$$\tilde{A}=(\mu_{\tilde{A}}(x_1),\mu_{\tilde{A}}(x_2),\cdots,\mu_{\tilde{A}}(x_n))$$

对于论域是连续实数区间时，表示模糊集合的有效方法就是写出其隶属函数。

例 1 以年龄作为论域 X = [0, 100], “年轻”是一个模糊概念，它可以表示为论域 X 上的模糊集，记作 $\tilde{Y}$，其隶属函数可以定义为

$$\mu_{\tilde{Y}}(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<x\le 100\end{cases}$$

模糊概念“年老”也可表示为 X 上的模糊集 $\tilde{O}$, 其隶属函数为

$$\mu_{\tilde{O}}(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<x\le 100\end{cases}$$

模糊集 $\tilde{Y}$ 和 $\tilde{O}$ 的隶属函数曲线如图 2 所示。

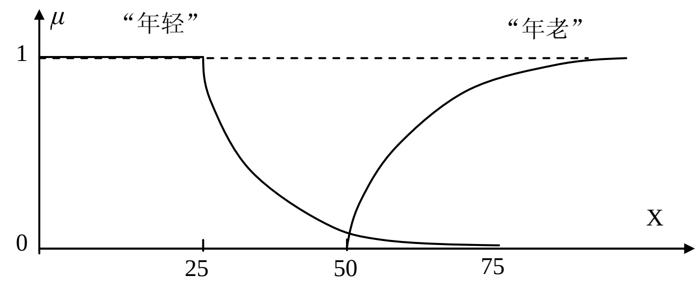


图 2 概念“年轻”与“年老”对应模糊集的隶属函数

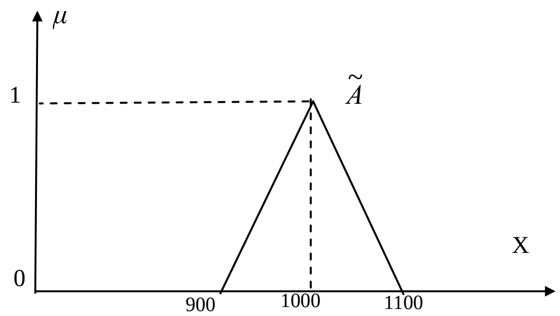


图 3 “大约 1000”模糊集的隶属函数

例 2　设 X 是所有实数，设模糊集 $\tilde{A}$ 的隶属函数为

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|1000-x|}{100}, & 900\le x\le 1100\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则 $\tilde{A}$ 表示为“大约 1000”这个模糊概念，其隶属函数的图形如图 3 所示。

在模糊分析学中称“大约 1000 元”、“20 公里左右”、“差不多有 30 来斤”这样表达的数字为模糊数。模糊数是模糊值函数分析学中重点研究的对象。

§1－4 模糊集合的运算与性质（100 分钟）

经典集合可以由特征函数唯一的确定，反之亦然。

① 模糊集运算定义的原则

模糊集与经典集间存在着拓广和特例的关系，即当隶属函数的值域从[0, 1]蜕化到{0, 1}时，模糊集合蜕化为普通集合。所以，模糊集合的并、交、余运算必须满足当隶属函数仅取 0，1 两值时，其定义与普通集合运算定义是一致的。

② Zadeh 给出的运算定义

直接利用了经典集合运算特征函数表达式的定义，只是将特征函数替换成隶属函数。

定义 1.2　设 $\tilde{A},\tilde{B}$ 是论域 X 的模糊子集,隶属函数分别为 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 和 $\mu_{\tilde{B}}(x)$，则模糊集合的相等、包含关系及并集、交集、余集表示为

$$\tilde{A}=\tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{B}}(x) \qquad \forall x\in X$$

$$\tilde{A}\supseteq\tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x)\geq\mu_{\tilde{B}}(x) \qquad \forall x\in X$$

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\vee\mu_{\tilde{B}}(x) \qquad \forall x\in X$$

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(x) \qquad \forall x\in X$$

$$\mu_{\tilde{A}^C}(x)=1-\mu_{\tilde{A}}(x) \qquad \forall x\in X$$

模糊集合的并集、交集和余集的隶属函数曲线如图 4 中阴影部分上面曲线所示。

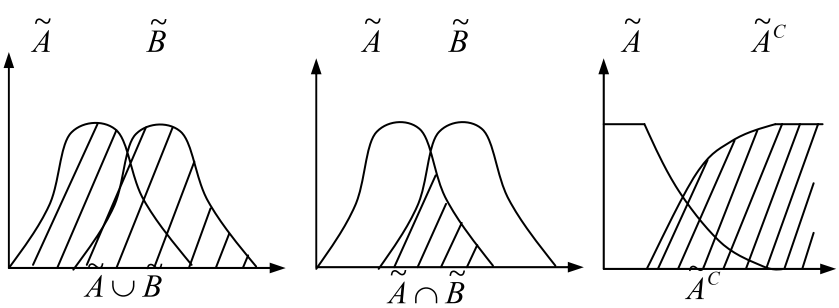


图 4. 模糊集合的并集、交集、余集的隶属函数曲线

③ 模糊集运算的扩充

Zadeh 给出的关于模糊集并、交、余运算的定义是直接从经典集合运算移植过来的，它保证了当模糊集蜕化成经典集合时定义的合理性。事实上，满足这种扩充原则的定义不是唯一的。例如，$\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in$ F (X), 定义并集和交集 A∪B, A∩B 的隶属函数如下：

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x)\cdot\mu_{\tilde{B}}(x) \qquad \forall x\in X$$

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\cdot\mu_{\tilde{B}}(x) \qquad \forall x\in X$$

称上述定义的一对运算为“概率算子”。称定义 1.2 中的运算为“最大—最小”算子。

④ 模糊集运算的性质

不难验证，模糊集合的并、交、余运算除了经典几何运算性质“补余律”不成立，即，对于 $\tilde{A} \in \mathcal{F}$ (X)，一般有

$$\tilde{A}\cup\tilde{A}^C \neq X, \qquad \tilde{A}\cap\tilde{A}^C \neq \emptyset$$

其他性质均成立。

作业安排及课后反思

教材第二章课后习题和以下问题。

1、 X = {1，2，3，4，5，6，7}，$A \in$ F (X)，其隶属度 $\mu_A(x)$ 如下：

$\mu_A(1)=0.1$， $\mu_A(2)=0.3$， $\mu_A(3)=0.8$， $\mu_A(4)=1$，

$\mu_A(5)=0.8$， $\mu_A(6)=0.3$， $\mu_A(7)=0$

（1） 分别别用查德法、向量法、序偶法表示 A；

（2）求 A^c；

（3）指出 A 的意义。

2、已知模糊集 “老年” O 和“年轻”Y 的隶属函数分别为

$$\mu_O(x)=\begin{cases}0, & \text{当}0\le x\le 50\text{时。}\\ [1+(\frac{x-50}{5})^{-2}]^{-1}, & \text{当}x>50\text{时。}\end{cases}$$

$$\mu_Y(x)=\begin{cases}1, & \text{当}0\le x\le 25\text{时。}\\ [1+(\frac{x-25}{5})^{2}]^{-1}, & \text{当}25<x\le 200\text{时。}\end{cases}$$

试写出模糊集“不老”和“既不老又不年轻”的隶属函数。

3、设 X=[0，1]，$\mu_A(x)=x$，$\mu_{A^c}(x)=1-x$；试证（F (X)，$\cup,\cap,^c$）不满足互补律。

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了电子教案和文字教案（本课程实施大纲）。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 张国立，张辉，孔倩. 模糊数学基础及应用. 化学工业出版社, 2011. 第一、二章

[2] 谢季坚. 模糊数学及其应用(第二版). 武汉: 华中理工大学出版社, 2000. 第一、二章

[3] 罗承忠. 模糊集引论(上下册). 北京: 北京师范大学出版社，1989. 第一章

[4] 李柏年. 模糊数学及其应用. 合肥：合肥工业大学出版社. 2007. 第一、二章

第二章　分解定理与表现定理

教学日期：2016.3.14，2016.3.16，2016.3.21

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点、难点：本章重点介绍模糊集合的分解定理和表现定理。

教学内容

§2－1 模糊集合的分解定理（120 分钟）

（1）、模糊集合的λ- 截集

定义 1 设 $\tilde{A} \in$F (X), ∀λ∈[0, 1], 记

Aλ = {x | x∈X, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ⩾λ }

称 Aλ为 $\tilde{A}$ 的λ-截集，λ为置信水平。

A_λ 是 X 上的明确子集。

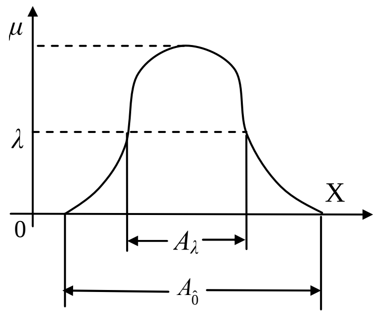


图 1. 模糊集合 **A** 的 λ 截集

▲对于 $\tilde{A} \in$F (X), 集合 A1 为 $\tilde{A}$ 的核，记为 ker $\tilde{A}$.

▲ $\tilde{A}$ 的承集（支集）

$$\mathrm{Supp}\tilde{A} = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

（2）、λ- 截集性质

$\tilde{A}$，$\tilde{B}$ ∈ F (X), λ∈[0,1], 模糊集合的λ-截集和λ-强截集与模糊集合的运算具有如下性质：

性质 1 $(\tilde{A} \cup \tilde{B})_\lambda = B_\lambda \cup A_\lambda$, $(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\lambda = B_\lambda \cap A_\lambda$

上述性质对任意可列个或有限个模糊集运算均成立。

性质 2　$\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow A_{\lambda_1} \supseteq A_{\lambda_2}$.

定理 1 （分解定理） 设 A∈P (X)，$\forall\lambda\in$[0，1]，定义 X 上的模糊集λ*A，其隶属函数为

$$\mu_{\lambda * A}(x)=\begin{cases}\lambda, x\in A\\ 0, x\notin A\end{cases}$$

对于$\forall\ \tilde{A}$∈F（X），有如下的分解形式，

$$\tilde{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda * A_{\lambda}$$

按图 2 解释,不作证明. 如图 2, 模糊集合$\tilde{A}$可由$\{A_{\lambda}|\lambda\in[0,1]\}$唯一确定。

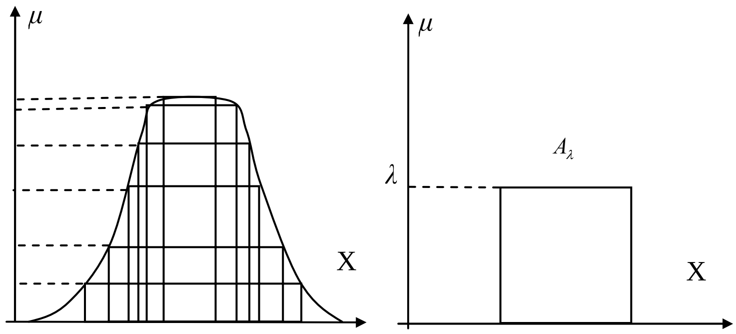


图 2.

上述分解定理的基本形式是由 Zadeh 给出的，在进一步讨论模糊函数的结构时，Zadeh 给出的分解定理有一定的局限性，因此，这里给出了模糊集合分解定理的另一种新的表达形式。

(3)、分解定理的新形式

考虑一种特殊情况，取集合为论域 X 上的单点集 A ＝ {x}, x∈X，称$x_{\lambda}=\lambda*\{x\}$ 为论域 X 上的模糊点，其中λ∈[0，1]。有

$$\mu_{x_{\lambda}}(y)=\mu_{\lambda*\{x\}}(y)=\begin{cases}\lambda, y=x\\ 0, y\neq x\end{cases}\qquad \forall x, y\in X \qquad (1)$$

设$\tilde{A}$∈F（X），对于给定的点x∈X 关于模糊集$\tilde{A}$的隶属度为$\mu_{\tilde{A}}(x)$。考虑x处的模糊点$x_{\lambda}=\lambda*\{x\}$，并取$\lambda=\mu_{A}(x)$，则称此模糊点为由模糊集$\tilde{A}$限定

的模糊点。事实上，$x_\lambda = \tilde{A} \cap \{x\}$.易知$\mu_{\lambda*\{x\}}(x) = \lambda$，因此，对于∀x∈X，有

$$\mu_{\mu_{\tilde{A}}(x)*\{x\}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \tag{2}$$

定理 2 （分解定理Ⅳ） 设$\tilde{A}$∈F（X），具有隶属函数$\mu_{\tilde{A}}(x)$，则有

$$\tilde{A} = \bigcup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) * \{x\} \tag{3}$$

由式(2)，定理是明显的。

这个分解形式是相当直观。由于把相互具有重合部分的一族集合的并替换成一族孤立的模糊点的并，使得利用分解定理研究或表述某些问题更加直观和简单。

§2－2　模糊集合的表现定理（120 分钟）

分解定理说明一个模糊集$\tilde{A}$可以被表示为一族普通集合A_λ的并，并且满足$\lambda_1 < \lambda_2$时，$A_{\lambda_1} \supseteq A_{\lambda_2}$。由分解定理自然会想到，利用 X 上的集合套是否可以表示一个模糊集合？

表现定理是模糊集合论又一个非常重要的定理，它从另一角度来揭示模糊集合与经典集合的关系。

定义 2　设集值映射

$$H: [0,1] \to \mathcal{P}(X);\ \lambda \to H(\lambda)$$

若 H 具有性质: $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_1) \supseteq H(\lambda_2)$，则称 H 为 X 上的集合套。

定理 3 (表现定理)　设 H 是 X 中的任何一个集合套, 则

$$\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * H(\lambda)$$

是 X 上的一个模糊集, 记为$\tilde{A}$，并且对$\forall \lambda \in [0,1]$，有

$$A_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$$

证明：略。

表现定理的意义是：X 上任给一个集合套都可以拼成一个模糊集。表现定理在理论上解释了模糊集与区间集的关系，说明模糊的对象可以由一系列赋予某种可能性度量的精确对象来表述。

下面讨论表现定理的应用问题。

★ 概率统计中的参数模糊区间估计

在数理统计中，参数的区间估计问题被描述为：设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 θ。又设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的一个简单样本。对于给定值 $\alpha(0<\alpha<1)$，若由样本确定的两个统计量 $\theta_{1\alpha} = \theta_{1\alpha}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\theta_{2\alpha} = \theta_{2\alpha}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足

$$P\{\theta_{1\alpha}(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \theta_{2\alpha}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1-\alpha$$

则称随机区间 $(\theta_{1\alpha}, \theta_{2\alpha})$ 为参数 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。

例如，如果总体 X 服从正态分布，即 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 σ^2 已知，μ 未知，则 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2},\ \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right).$$

从上面简单的例子可以看出，当 $\alpha \to 0$ 时，$z_{\alpha/2} \to \infty$，也就是说，若置信度 $1-\alpha=1$，则相应 μ 的置信区间为整个实数区域；当 $\alpha \to 1$ 时，$z_{\alpha/2} \to 0$，由 (1.24)看出，若置信度 $1-\alpha=0$，则相应 μ 的置信区间为收敛为点 $\overline{X}$。这里为样本的算术平均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$。

对于一般情况，设参数 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\theta_{1\alpha}, \theta_{2\alpha})$，若

$0<\alpha_1<\alpha_2<1$，有$(\theta_{1\alpha_1},\theta_{2\alpha_1})\supset(\theta_{1\alpha_2},\theta_{2\alpha_2})$。

若记置信区间为 $\mathrm{H}(\alpha)=(\theta_{1\alpha},\theta_{2\alpha})$,于是具有性质：$\alpha_1\leqslant\alpha_2\Rightarrow$ $\mathrm{H}(\alpha_1)\supseteq\mathrm{H}(\alpha_2)$，则 $\mathrm{H}(\alpha)=(\theta_{1\alpha},\theta_{2\alpha})$ 为 X 上的集合套。由表现定理，我们记

$$\tilde{\theta}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha*\mathrm{H}(\alpha).$$

称其为参数θ的模糊置信区间。同时容易证明，$\tilde{\theta}$是一个模糊数（模糊数的定义将在后面介绍）。

讨论（15 分钟）

1、古代史分期中，记

$$[\text{奴隶社会}]=\frac{1}{\text{夏}}+\frac{1}{\text{商}}+\frac{0.9}{\text{西周}}+\frac{0.7}{\text{春秋}}+\frac{0.5}{\text{战国}}+\frac{0.4}{\text{秦}}+\frac{0.3}{\text{西汉}}+\frac{0.1}{\text{东汉}}$$

取 λ=0.5 的截集作为奴隶社会的划分界限，问奴隶社会应包含哪些朝代？

作业安排及课后反思

教材第三章课后习题以及下列思考题。

1、设$A\in\mathrm{F}(\mathrm{R})$的隶属函数$\mu_A(x)=e^{-x^2/2}$，给定 λ=0.5，求$\chi_{A_\lambda}(x)$。

2、设$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$A=\frac{0.5}{x_1}+\frac{0.6}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0.7}{x_4}+\frac{0.3}{x_5}$。

（1）取 λ=0.3，0.5，0.6，0.7，1；将 A 分解为普通集合；

（2）用分解定理，用普通集合构造 A；

（3）分解定理求$\mu_A(x_4)$。

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了电子教案和文字教案（本课程实施大纲）。本课程无其他特

殊要求。

参考资料

[1] 张国立，张辉，孔倩. 模糊数学基础及应用. 化学工业出版社, 2011. 第三章

[2] 谢季坚. 模糊数学及其应用(第二版). 武汉: 华中理工大学出版社, 2000. 第三章

[3] 罗承忠. 模糊集引论(上下册). 北京: 北京师范大学出版社, 1989. 第二章

[4] 李柏年. 模糊数学及其应用. 合肥：合肥工业大学出版社. 2007. 第三章

第三章 模糊集合度量与模糊模式识别

教学日期：2016.3.23，2016.3.28，2016.3.30

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点、难点：本章首先介绍模糊集合的度量，其中重点介绍模糊集合的贴近度。在此基础上介绍模糊模式识别技术，包括，模糊模式识别的最大隶属度原则和贴近原则，以及基于自然语言模式和基于统计模式的模式识别技术。

教学内容

§3－1 模糊集合的度量（60分钟）

（1）、模糊集合的模糊度（此段非重点）

定义1 设论域为 X，若映射 D: F（X）→［0，1］满足条件

（s1）$D(\tilde{A})=0$, 当且仅当 $\tilde{A}\in$P（X）;

（s2）$\mu_{\tilde{A}}(x)=0.5 \Rightarrow D(\tilde{A})=1$

(s3) 若 $\forall x\in$X，$\mu_{\tilde{A}}(x)\geq\mu_{\tilde{B}}(x)\geq 0.5$ 或 $\mu_{\tilde{A}}(x)\leq\mu_{\tilde{B}}(x)\leq 0.5$，则 $D(\tilde{A})\leq D(\tilde{B})$；

（s4） $D(\tilde{A})=D(\tilde{A}^C)$,

则称 $D(\tilde{A})$ 为模糊集 $\tilde{A}$ 的模糊度。

关于模糊度的定义很多，同学们简单地看一下《软计算》书14页给出的距离模糊度和模糊熵。并希望同学们能够自己构造出一些模糊度的定义。

（2）、模糊集合的贴近度（重点）

贴近度是描述两个模糊集相近似程度的一种度量，最早是由我国著名

模糊数学学者汪培庄先生提出来的。

定义 2 设σ为映射

$$\sigma：F（X）\times F（X）\rightarrow [0，1]$$

$$(\tilde{A},\tilde{B})\mapsto\sigma(\tilde{A},\tilde{B})$$

若σ满足：

Ⅰ、$\sigma(\tilde{A},\tilde{A})=1$，$\sigma(\varphi,X)=0$；

Ⅱ、$\sigma(\tilde{A},\tilde{B})=\sigma(\tilde{B},\tilde{A})$；

Ⅲ、$\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}\in$F（X）且 $\tilde{A}\subseteq\tilde{B}\subseteq\tilde{C}\Rightarrow\sigma(\tilde{A},\tilde{C})\le\sigma(\tilde{A},\tilde{B})\wedge\sigma(\tilde{B},\tilde{C})$,

则称$\sigma(\tilde{A},\tilde{B})$为$\tilde{A},\tilde{B}$的贴近度。

常用的模糊集合贴近度的定义（见教材）。

并希望同学们能够自己构造出一些模糊贴近度的定义。

§3－2 模糊模式识别方法（200 分钟）

① 模糊模式识别的原则

a、最大隶属度原则；（18 页）

当模式是模糊的，被识别对象是明确的，问题可以描述成：设$\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\cdots,\tilde{A}_n$是论域$U$中的$n$个模糊子集表示的$n$个模糊模式。$u_0$是$U$中的一个元素。若有$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使

$$\mu_{\tilde{A}_i}(u_0)=\max_{1\le j\le n}\{\mu_{\tilde{A}_j}(u_0)\}$$

则认为u_0相对隶属于模式$\tilde{A}_i$，并称这种识别方法为最大隶属原则。

b、贴近度原则

当模式及被识别对象都是模糊的，问题可以描述成：

设U上的模糊子集$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_n$代表$n$个模糊模式，另一模糊子集$\tilde{B}$为被识别对象。若有$1 \le i \le n$，使得

$$\sigma(\tilde{B}, \tilde{A}_i) = \max_{1 \le j \le n} \sigma(\tilde{B}, \tilde{A}_j)$$

即$\tilde{B}$与n个模糊模式$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_n$中的$\tilde{A}_i$最贴近，称$\tilde{B}$相对合于模式$\tilde{A}_i$，这种识别方法叫做择近原则。

② 简单模式的模糊模式识别

对于简单模式识别的直接方法可分为如下三个步骤：

1. 选取模式的特征因子集合$U = (U_1, U_2, \cdots, U_n)$，$u_i \in U_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$；

2. 建立模糊模式的隶属函数$\mu_{\tilde{A}}(u)$，$\tilde{A} \in \mathrm{F}(\prod_{i=1}^{n} U_i)$；

3. 利用最大隶属原则对被识别对象$u_0 \in (\prod_{i=1}^{n} U_i)$进行归属判决。

特征因子$U_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$的选取直接影响识别的效果，它取决于识别者的知识和技巧，很难做一般性讨论。而模式识别中最困难的是建立模式的数学结构（隶属函数），人们还没有从理论上彻底解决隶属函数的确定问题。一个简单的模糊模式识别问题，主要是依据人的主观经验来建立模式的隶属函数。

通过下面的例子，我们可以对模糊模式识别的直接方法有更深刻的了解。

[例 1] 三角形的识别

利用机器自动识别图形是个很有意义的课题。譬如，在医学上，可以利用机器自动识别染色体、癌细胞或白血球分类，在气象工作中，利用机器自动识别较复杂的天气图，进行环流分辨，等等。

我们以几何图形中最基本的三角形为例，来说明最大隶属原则在图形识别中的应用。

取特征因子集

$$U=\left\{(A,B,C)\middle| A+B+C=180^{\circ},A\geq B\geq C\geq 0\right\}$$

其中 A，B，C 分别表示三角形的三个内角。

根据三角形的特征，在U中规定 5 个具体的三角形：（1）等腰三角形$\tilde{I}$；（2）直角三角形$\tilde{R}$；（3）正三角形$\tilde{E}$；（4）等腰直角三角形$I\tilde{R}$；（5）非典型三角形$\tilde{O}$，其各自的隶属函数为：

$$\mu_{\tilde{I}}(A,B,C)=1-\frac{1}{60}\min(A-B,B-C)$$

这样规定的理由是：当 $A=B$ 或 $B=C$（真正等腰），有 $\mu_{\tilde{I}}(A,B,C)=1$；当 $A=120^{\circ}$， $B=60^{\circ}$， $C=0^{\circ}$（最不等腰）时，有 $\mu_{\tilde{I}}(A,B,C)=0$ 。

$$M_{\tilde{R}}(A,B,C)=1-\frac{1}{90}\left|A-90\right|$$

容易看出，当 $A=90^{\circ}$ 时， $\mu_{\tilde{R}}(A,B,C)=1$ ，当 $A=180^{\circ}$ 时， $\mu_{\tilde{R}}(A,B,C)=0$ 。

$$M_{\tilde{E}}(A,B,C)=1-\frac{1}{180}\max(A-B,A-C)$$

当 $A=B=C=60^{\circ}$ 时，有 $\mu_{\tilde{E}}(A,B,C)=0$ 。

$\because\ I\tilde{R}=\tilde{I}\cap\tilde{R}$

$\therefore\ \mu_{I\tilde{R}}(A,B,C)=\mu_{\tilde{I}}(A,B,C)\wedge\mu_{\tilde{R}}(A,B,C)$

$$=\min[1-\frac{1}{60}\min(A-B,B-C),1-\frac{1}{90}\left|A-90\right|]$$

$\because \tilde{O}=\tilde{I}^{C}\cap\tilde{E}^{C}\cap\tilde{R}^{C}$

$\therefore \mu_{\tilde{O}}(A,B,C)=\mu_{\tilde{I}}(A,B,C)\wedge\mu_{\tilde{E}}(A,B,C)\wedge\mu_{\tilde{R}}(A,B,C)$

$$=\min[1-\mu_{\tilde{I}}(A,B,C),1-\mu_{\tilde{E}}(A,B,C),1-\mu_{\tilde{R}}(A,B,C)]$$

$$=\frac{1}{180}\min[3(A-B),3(B-C),2\left|A-90\right|,\max(A-B,A-C)]$$

设给定一个具体的三角形$(A_0,B_0,C_0)=(95^\circ,45^\circ,40^\circ)$，为判断这个三角形属于哪一类型，先将$A_0,B_0,C_0$分别代入各隶属函数，得出

$$\mu_{\tilde{I}}(A_0,B_0,C_0)=0.92$$
$$\mu_{\tilde{R}}(A_0,B_0,C_0)=0.94$$
$$\mu_{\tilde{E}}(A_0,B_0,C_0)=0.69$$

$$\mu_{\tilde{IR}}(A_0,B_0,C_0)=\mu_{\tilde{I}}(A_0,B_0,C_0)\wedge\mu_{\tilde{R}}(A_0,B_0,C_0)=0.92$$

$$\mu_{\tilde{O}}(A_0,B_0,C_0)=\mu_{\tilde{I}}(A_0,B_0,C_0)$$
$$\wedge\mu_{\tilde{E}}(A_0,B_0,C_0)\wedge\mu_{\tilde{R}}(A_0,B_0,C_0)=0.06$$

按照最大隶属原则，判它为近似直角三角形。

如果遇到最大是隶属函数不唯一时，可以规定：$\mu_{\tilde{I}}=\mu_{\tilde{E}}$为最大，则归入$\tilde{E}$类；若$\mu_{\tilde{I}}=\mu_{\tilde{R}}$为最大，则归入$\tilde{IR}$类。

这种识别方法的重点是模式隶属函数的建立，通常是根据人的实践经验去建立。

③ 基于语言模式的模糊模式识别

在许多应用问题中，模式可以借助所研究客体的语言表述来得到。

需要说明的是，此处谈到的语言模式并不是传统模式识别技术中的文法分析，而是指模式的特征可以用人的自然语言来表述。

【例 2】：癌细胞识别（［1］21 页）

癌细胞的特征可以用下述语言描述：

“细胞畸形，或者细胞核增大且核染色增深且核浆比倒置且核内染色质不匀，或者细胞核增大且染色增深且核浆比倒置且核畸形”。

引入集合表示：

$\tilde{A}$为细胞畸形，

$\tilde{B}$为核增大，

$\tilde{C}$ 为核染色增深，

$\tilde{D}$ 为核浆比倒置，

$\tilde{E}$ 为核内染色质不匀，

$\tilde{F}$ 为核畸形。

它们分别为相应论域上的模糊集。

例如，用 x_1 表示细胞周长的平方于细胞面积之比，模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数取为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = (1 + \frac{\alpha_1}{(x_1 - x_0)^2})^{-1}$$

式中 x_0 为常数，通常 x_0 为正常细胞的周长平方于面积比，α_1 为待定参数。

又如，用变量 x_2 表示细胞核的面积， y_0 为一常数，（y_0 小于正常细胞核面积），模糊集 $\underset{\sim}{B}$ 的隶属函数可取为

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y) = \left[1 + \alpha_2 \cdot \left(\frac{y_0}{x_2}\right)^2\right]^{-1},$$

其中 α_2 为待定参数。

又设变量 x_3 的核内总光密度，模糊集 $\underset{\sim}{C}$ 的隶属函数可取

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(z) = (1 + \frac{\alpha_3}{x_3^2})^{-1},$$

式中 α_3 为待定参数。

类似的，可以构建模糊集 $\underset{\sim}{D}$ 、 $\underset{\sim}{E}$ 、 $\underset{\sim}{F}$ 的隶属函数，此处从略。

设 $\underset{\sim}{M}$ 表示癌细胞模式，于是，由癌细胞的特征语言描述，由癌细胞的特征语言描述，癌细胞模式 $\underset{\sim}{M}$ 可以写成

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{M} &= \underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C} \cap \underset{\sim}{D} \cap \underset{\sim}{E}) \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C} \cap \underset{\sim}{D} \cap \underset{\sim}{F}) \\ &= \underset{\sim}{A} \cup \left[\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C} \cap \underset{\sim}{D} \cap (\underset{\sim}{E} \cup \underset{\sim}{F})\right]\end{aligned}$$

对于给定的待识别细胞，可测得各种特征数据$(x_1, x_2, \cdots, x_6)$，则该细胞属于癌细胞得程度为

$$\mu_{\underset{\sim}{M}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1) \vee \left[\mu_{\underset{\sim}{B}}(x_2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{C}}(x_3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{D}}(x_4) \wedge (\mu_{\underset{\sim}{E}}(x_5) \vee \mu_{\underset{\sim}{F}}(x_6)) \right]$$

【例 3】：江淮地区汛期降水量预报（[3]）

江淮地区有一民间天气谚语“冻大水大”。意思是说，冬天越冷，来年夏季雨水越大。于是，预测汛期降水得多少即可转化为识别冬季是否符合“冻大”得模式。

“冻大”必须具备的两个条件式：（1）气温要低；（2）低温天气持续的时间长。为此，选取 4 个特征因子。

x_1:冬季（12～2 月）平均气温，

x_2:2 月份最低气温$< -5^\circ C$的天数，

x_3:冬季（12～2 月）极端最低气温，

x_4:极端最低气温出现时间。

根据人的经验，“冻大”可以用自然语言表述为

“冬季平均气温低且 2 月份气温$< -5^\circ C$的天数长，或者冬季极端最低气温低且极端低温持续时间长”。

用α_1表示冬季平均气温“低”，α_2表示 2 月份气温$< -5^\circ C$的天数“长”，α_3表示冬季极端低温“低”，α_4表示极端低温持续时间“长”。

我们分别用论域X_1, X_2, X_3, X_4上的模糊子集，$\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \underset{\sim}{A}_3, \underset{\sim}{A}_4$来表示模糊概念$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$，用$\underset{\sim}{M}$表示“冻大”模糊集，则由冻大概念的语言表述，有

$$\underset{\sim}{M} = [\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2] \cup [\underset{\sim}{A}_3 \cap \underset{\sim}{A}_4]$$

其隶属函数为

$$\mu_{\underset{\sim}{M}}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left[\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x_1)\wedge\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(x_2)\right]\vee\left[\mu_{\underset{\sim}{A}_3}(x_3)\wedge\mu_{\underset{\sim}{A}_4}(x_4)\right]$$

经反复调整，模糊集 $\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\underset{\sim}{A}_3,\underset{\sim}{A}_4$ 的隶属函数构建如下：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x_1)=\begin{cases}1, & x_1\le 3\\ 1-\dfrac{x_1-3}{0.6}, & 3<x_1<3.6\\ 0, & x_1\ge 3.6\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(x_2)=\begin{cases}0, & x_2\le 4\\ \left[1+\dfrac{1}{2(x_2-4)^2}\right]^{-1}, & x_2>4\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_3}(x_3)=\begin{cases}1, & x_3\le -12\\ \left[1+\dfrac{(12+x_3)^2}{2}\right]^{-1}, & x_3>-12\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_4}(x_4)=\begin{cases}0, & x_4\le 30\\ \dfrac{x_4-30}{30}, & 30<x_4<60\\ 1, & x_4\ge 60\end{cases}$$

对于给定的某年观测值 (x_1,x_2,x_3,x_4)，可得到 $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x_1,x_2,x_3,x_4)\in[0,1]$ 的具体值，它表示满足“冻大”概念的程度，可以视为该年汛期为“水大”的可能性程度。

利用江淮地区 1967 年至 1979 年的气象资料，对每年的“冻大”$\underset{\sim}{M}$ 的隶属函数值进行了计算，并得到一个阈值 $\lambda=0.6$，若 $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x_1,x_2,x_3,x_4)>\lambda$ 时，则预报该年 6～8 月总降水量为“水大”，反之预报为“水小”。历史拟合计算数据见表 1-1，正确率为百分之百。用此方法在 1980～1983 连续 4 年预报当地汛期旱涝趋势，预报结果（见表 1-2）均正确。

表 1-1　1967－1979 年江淮地区汛期降水量拟合结果

年份 x	$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x_1)$	$\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(x_2)$	$\mu_{\underset{\sim}{A}_3}(x_3)$	$\mu_{\underset{\sim}{A}_4}(x_4)$	$\mu_{\underset{\sim}{M}}(x)$	6-8 月份 降水量距平	拟合
1967	1	0	1	0	0	－216.3	√
1968	1	0.86	0.67	0	0.86	＋354.7	√
1969	1	0.94	1	1	1	＋86.6	√
1970	0.33	0	0.99	0.57	0.57	－81.3	√

1971	0	0.69	0.35	1	0.35	－160.7	√
1972	1	0.86	1	1	1	＋298.6	√
1973	0.17	0	0.19	0	0	－82.7	√
1974	1	0.69	0.19	0	0.69	＋244.7	√
1975	0.67	0	1	0.63	0.63	＋179.4	√
1976	1	0.40	0.14	0	0.40	－281.3	√
1977	1	0.86	1	1	1	＋22.3	√
1978	0	0	0.60	0.60	0.16	－195.4	√
1979	0	0	0.45	0.57	0.45	－46.8	√

表 1-2　1980－1983 年江淮地区汛期降水预报结果

年份 x	$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x_1)$	$\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(x_2)$	$\mu_{\underset{\sim}{A}_3}(x_3)$	$\mu_{\underset{\sim}{A}_4}(x_4)$	$\mu_{\underset{\sim}{M}}(x)$	预报	实况距平	评定
1980	0.50	0.83	0.70	1	0.70	多水	＋353.8	√
1981	1	0	0.50	0	0	少水	－208.3	√
1982	1	0.66	0.31	0	0.66	多水	＋271.5	√
1983	1	1	0.20	0	1	多水	＋90.5	√

基于语言模式的模式识别在现代管理科学中有着较广泛的应用背景，如对企业经营的评价、人才的选择、项目的评估等等，其模式都能够借助自然语言表述。

④ 基于统计模式的模糊模式识别

关于正态模糊集（模糊数）概念介绍:

设U是实数域，U上的模糊集$\tilde{A}$的隶属函数为

$$\mu_{\tilde{A}}(u) = e^{-(\frac{u-a}{b})^2} \qquad (b>0)$$

称为正态模糊集。

【例 4】：小麦亲本识别（［1］22 页）

在小麦杂交过程中，亲本的选择是关键措施之一。亲本类型的划分是模糊的。为使问题叙述简单，仅就单一性状“百粒重”来进行划分。把每一株小麦的百粒重作为讨论对象，取论域$U=[0,10]$，一个小麦亲本可以表示为U上的一个模糊子集$\tilde{A}$，具有隶属函数

$$\mu_{\tilde{A}_i}(u) = e^{-(\frac{u-a_i}{b_i})^2} \qquad (b_i>0)$$

其中参数a_i, b_i可以通过对该亲本的百粒重进行抽样，用统计方法求平均值(a)及标准差(σ)而得到。

表中，取五个亲本作为模型，并计算出相应的参数a_i与b_i。

百粒重参数 亲本名称	a_i	b_i
早熟$(\tilde{A}_1)$	3.7	0.3
矮杆$(\tilde{A}_2)$	2.9	0.3
大粒$(\tilde{A}_3)$	5.0	0.3
高肥丰产$(\tilde{A}_4)$	3.9	0.3
中肥丰产$(\tilde{A}_5)$	3.7	0.2

现在，有一种未定其类型的小麦亲本$\tilde{B}$，经统计，测得其参数为

$a = 3.43, b = 0.28$

要问，应将此亲本列为前述五种模型中之哪一种？

按照（5.7）式，算得

$$(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}_1) = 0.91, (\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}_2) = 0.72, (\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}_3) = 0.50$$
$$(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}_4) = 0.76, (\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}_5) = 0.89$$

按择近原则，将此小麦亲本列为早熟型。

【例 5】河南南部铁矿区矿藏预测 （[3]）

为了实现矿产预测的目的，可以用一定边长的正方形网络来覆盖所研究的区域，每一方格，叫做一个矿产预测单元，以其为元素，组成论域U。“有矿区”是U上的一个模糊子集。因为，常常有这样一些单元，对于它们，不能绝对地谈有矿或无矿。有的单元只有零星矿点，有的单元有较多矿点，有的单元只有未达到工业价值的贫矿床存在，有的单元中有品位较高的有工业价值的富矿存在。对于这些单元而言，只能讨论它们有矿的程

度如何。所以，“有矿区”是U上的模糊子集。

河北省南部有一铁矿区，在该矿区东北部取试验地段面积为 250 平方公里，以 1 平方公里的小方格为预测单元，在 1：25000 地质图和航磁图上取下五种地质变量和地球物理变量作为矿产预报的原始数据，它们是：

中生代岩浆在单元中的出露面积（万平方米）；

奥陶系统中灰岩在单元内的出露面积；

单元内的断裂构造长度（米）；

单元内平均航磁值（伽玛）；

单元内最高航磁值（伽玛）。

在该区内选取 22 个已知有矿的单元，设第j个单元上述五个变量的实测数据为

$$(u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, u_{4j}, u_{5j}) \qquad (j = 1,2,\cdots,22)$$

求出其平均值

$$\overline{\mu}_i = \frac{1}{22}\sum_{j=1}^{22}\mu_{ij}$$

再求每一个分量的样本方差：

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{21}\sum_{j=1}^{22}\mu_{ij}{}^2 - \overline{\mu}_i^2$$

令

$$\alpha_i^2 = 2\sigma_i^2 (i = 1,2,3,4,5), \qquad \alpha_i = \sqrt{2}\sigma_i$$

构造有矿$(\underset{\sim}{A})$对各个变量的分隶属函数为：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_i}(u_i) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2\sigma_i^2}(u_i - \overline{u}_i)^2, & \text{当} |u_i - \overline{u}_i| \le \alpha_i \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \qquad (i = 1,2,3,4,5)$$

同样，在该区内选取若干个应判为“无矿”的已知单元，建立无矿 $(\underset{\sim}{B})$ 的分隶属函数为：

$$\mu_{\underset{\sim}{B}_i}(u_i)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2\sigma_i'^2}(u_i-\overline{u}_i')^2, 当|u_i-\overline{u}_i'|\le\alpha_i' \\ 0, 否则\end{cases}$$

其中 u_i' 及 $\sigma_i'^2$ 分别是无矿单元第 i 个变量观测值的样本均值与方差，$\alpha_i'=\sqrt{2}\sigma_i'$。

将 $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$ 作为模式，对河北南部铁矿区取观察数据，类似地计算出 $\overline{u}_i''$ 和 σ_i''。将“南部铁矿”视为模糊集 $\underset{\sim}{C}$，其隶属函数为：

$$\mu_{\underset{\sim}{B}_i}(u_i)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2\sigma_i''^2}(u_i-\overline{u}_i'')^2, 当|u_i-\overline{u}_i''|\le\alpha_i'' \\ 0, 否则\end{cases}$$

分别计算 $\underset{\sim}{C}_i$ 与 $\underset{\sim}{A}_i,\underset{\sim}{C}_i$ 与 $\underset{\sim}{B}_i$ 的贴近度，有

$$\sigma(\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{C}_1)=0.9995,\sigma(\underset{\sim}{B}_1,\underset{\sim}{C}_1)=0.627$$
$$\sigma(\underset{\sim}{A}_2,\underset{\sim}{C}_2)=0.9902,\sigma(\underset{\sim}{B}_2,\underset{\sim}{C}_2)=0.724$$
$$\sigma(\underset{\sim}{A}_3,\underset{\sim}{C}_3)=0.9950,\sigma(\underset{\sim}{B}_3,\underset{\sim}{C}_3)=0.999$$
$$\sigma(\underset{\sim}{A}_4,\underset{\sim}{C}_4)=0.9923,\sigma(\underset{\sim}{B}_4,\underset{\sim}{C}_4)=0$$
$$\sigma(\underset{\sim}{A}_5,\underset{\sim}{C}_5)=0.9870,\sigma(\underset{\sim}{B}_4,\underset{\sim}{C}_4)=0$$

最后，视 $\underset{\sim}{C}$ 对 $\underset{\sim}{A}$ 的贴近度为

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C})=\min_{1\le i\le 5}\sigma(\underset{\sim}{A}_i,\underset{\sim}{C}_i)=0.9870$$

视 $\underset{\sim}{C}$ 对 $\underset{\sim}{B}$ 的贴近度为

$$\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C})=\min_{1\le i\le 5}\sigma(\underset{\sim}{B}_i,\underset{\sim}{C}_i)=0$$

故判河北南部铁矿 $\underset{\sim}{C}$ 为“有矿”，具有开采价值。

作业安排及课后反思

教材第四章课后习题以及下面思考题

1、“不清晰的条形码识别问题”，请同学们自己思考解决方案。

2、已知 $\tilde{A}=\begin{pmatrix}0.7 & 1 & 0.2\\ 0.3 & 0.5 & 0.6\end{pmatrix}$； $\tilde{B}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.5\\ 0.8 & 1\\ 0.6 & 0.2\end{pmatrix}$； $\tilde{C}=\begin{pmatrix}0.2\\ 0.6\\ 0.7\end{pmatrix}$； $D=\begin{pmatrix}0.1 & 0.5 & 0.3\end{pmatrix}$

求（1） $\tilde{A}\circ\tilde{B}$ （2） $\tilde{C}\circ\tilde{D}$ （3） $\tilde{D}\circ\tilde{C}$

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了电子教案和文字教案（本课程实施大纲）。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 张国立，张辉，孔倩. 模糊数学基础及应用. 化学工业出版社, 2011. 第四章

[2] 谢季坚. 模糊数学及其应用(第二版). 武汉: 华中理工大学出版社, 2000. 第四章

[3] 罗承忠. 模糊集引论(上下册). 北京: 北京师范大学出版社, 1989. 第三章

[4] 李柏年. 模糊数学及其应用. 合肥：合肥工业大学出版社. 2007. 第四章

第四章 模糊关系与模糊综合评价

教学日期：2016.4.6， 2016.4.11，2016.4.13

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点、难点：本章介绍模糊关系概念，给出模糊关系的运算，特别重点介绍模糊关系的合成。作为模糊关系合成运算的应用，介绍一种应用十分广泛的模糊综合评价方法。

教学内容

§4－1 模糊关系及运算（60 分钟）

普通关系的定义及运算关系的定义：

设两个集合U和V，笛卡尔乘积

$$U \times V \triangleq \{(u,v) | u \in U, v \in V\}$$

是两个集合元素间的无约束有序搭配。

定义 4.1 设U、V是两个集合，叉积$U \times V$的子集R称为U到V的一个关系（确切地说，R是一个二元关系），记作

$$U \xrightarrow{R} V$$

对于元素$u \in U, v \in V$，若$(u,v) \in R$，称u对v有关系R，记作uRv；否则$u\bar{R}v$。当$U = V$时，称R为U中的关系。

[例] R_1、R_2、R_3是$U \times V$的子集，有

$R_1 = \{(u,v) | u \le v\}$， $R_2 = \{(u,v) | u^2 + v^2 \le 1\}$， $R_3 = \{(u,v) | v = f(u)\}$

由R_3看到，函数也是一种特殊的关系，可见，关系是比函数更广泛的概念。

关系的特征函数与关系矩阵

若U、V都是有限集，设$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$， $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，R表示U到V的关系，则R可以用矩阵$R=[r_{ij}]_{mxn}$ 表示，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & u_i R v_j \\ 0, & u_i \overline{R} v_j\end{cases}$$

即，普通关系矩阵是（0-1）矩阵。

关系的运算

下面，我们仅对有限集U到V上的关系作以简单地概括。

设U、V都是有限集，R和S是U到V的两个关系，即

$$R\subseteq U\times V\text{，}\ S\subseteq U\times V$$

R和S相应的矩阵为$M_R=[r_{ij}]$和$M_S=[s_{ij}]$，则关系的运算对应了矩阵的运算。

●相等，包含，并，交，补运算的矩阵表示。

●合成 假设R是U到V的关系，S是V到W的关系，Q是U到W的关系，对于$u\in U,w\in W$，若uQw当且仅当存在$v\in V$，使得uRv且vSw，则称关系Q是关系R对S的合成，记作$Q=R\circ S$

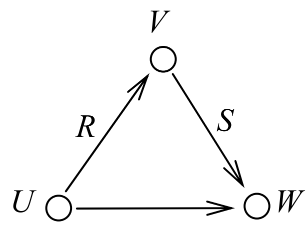


图 关系的合成

关系的合成运算可以用图表示。

合成关系的重要性在于，通过两个已知关系得出一个新的关系。例如，若R表示“弟兄”关系，S表示“父子”关系，则$R\circ S$给出$Q=R\circ S$了“叔侄”关系。

②、模糊关系定义

模糊关系的例子（如人与人之间的面貌“相象”关系）。

定义 4.2　称$U\times V$的一个模糊子集$\underset{\sim}{R}$为从U到V的一个模糊关系，记作

$$U \xrightarrow{\underset{\sim}{R}} V$$

$\underset{\sim}{R}$的隶属函数用$\mu_{\underset{\sim}{R}}(u,v)$表示，对于给定的$(u_0,v_0)$，$\mu_{\underset{\sim}{R}}(u_0,v_0)$表示$(u_0,v_0)$具有关系$\underset{\sim}{R}$的程度。当$U=V$时，称$\underset{\sim}{R}$为$U$中的模糊关系。

显然，当$\mu_{\underset{\sim}{R}}(u,v)$只取 0，1 时，就是普通关系。因此，模糊关系是普通关系的拓广。

模糊关系的举例（约等于、远远大于、面貌相似，等等）

模糊关系的隶属函数$\mu_R(x,y)\in$［0，1］表示 x 与 y 具有关系 R 的程度。

模糊关系矩阵：若 X 和 Y 都是有限集合时，模糊关系的隶属函数$\mu_R(x,y)$可以用矩阵形式给出，记

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

其中，$r_{ij}\in[0,1]$表示x_i与y_j具有关系 R 的程度。

模糊关系的包含、相等、并、交、补运算。（模糊关系运算的性质有模糊集合运算性质相同，主要讨论有限集上的模糊关系及关系运算的关系矩阵表示形式）

举例说明模糊关系运算的意义。

§4－2 模糊关系的合成（100 分钟）

(一) 模糊矩阵的运算与性质

有限论域U、V的笛卡尔乘积集$U\times V$中的模糊子集可以表示成一个模

糊矩阵，因此，模糊矩阵成为模糊数学的主要计算工具，用$M_{n\times m}$表示$n\times m$模糊矩阵的全体。

定义 3　设模糊关系$\underset{\sim}{R}=\left[r_{ij}\right]_{n\times m}$，$\underset{\sim}{S}=\left[s_{ij}\right]_{n\times m}$，则：

1）$\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{S}$当且仅当对所有$i,j,r_{ij}=s_{ij}$成立;

2）$\underset{\sim}{R}\subseteq\underset{\sim}{S}$当且仅当对所有$i,j,r_{ij}\le s_{ij}$成立;

3）$\underset{\sim}{R}\cap\underset{\sim}{S}=[r_{ij}\wedge s_{ij}]_{n\times m}$;

4）$\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{S}=[r_{ij}\vee s_{ij}]_{n\times m}$;

5）$\overline{\underset{\sim}{R}}=[1-r_{ij}]_{n\times m}$.

上述五种运算分别对应于模糊关系的相等、包含、交、并、补运算。

例　设

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.8\\ 0.5 & 0.4\end{bmatrix},\quad \underset{\sim}{S}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.6\\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix}$$

则

$$\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{S}=\begin{bmatrix}0.2\vee 0.9 & 0.8\vee 0.6\\ 0.5\vee 0.9 & 0.4\vee 0.7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.8\\ 0.5 & 0.7\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R}\cap\underset{\sim}{S}=\begin{bmatrix}0.2\wedge 0.9 & 0.8\wedge 0.6\\ 0.5\wedge 0.9 & 0.4\wedge 0.7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.6\\ 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$$

$$\overline{\underset{\sim}{R}}=\begin{bmatrix}1-0.2 & 1-0.8\\ 1-0.5 & 1-0.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.5 & 0.6\end{bmatrix}$$

由于模糊关系是有限论域$U\times V$中的模糊子集，而模糊矩阵正是$U\times V$上模糊集合的隶属函数表现形式，可见模糊集合在并、交、补运算下具备的所有性质，这里同样满足。

(二) 模糊关系的合成与意义

下面介绍一个很重要的运算—模糊关系的合成运算，这种运算是模糊

决策、模糊推理及模糊控制的基础工具。

定义　设模糊矩阵 $\underset{\sim}{R} \in M_{m\times n}$， $\underset{\sim}{S} \in M_{n\times l}$ 表示两个模糊关系，则 $\underset{\sim}{R}$ 与 $\underset{\sim}{S}$ 的合成运算定义为 $\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{Q}$，其中 $\underset{\sim}{Q} = [q_{ij}]_{m\times l} \in M_{m\times l}$， $q_{ij} = \bigvee_{k-1}^{n} (r_{ik} \wedge s_{kj})$.

容易验证，合成运算满足如下性质

1） $(\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S}) \circ \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{R} \circ (\underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{Q})$

2） $\underset{\sim}{R} \circ (\underset{\sim}{S} \cup \underset{\sim}{Q}) = (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S}) \cup (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{Q})$

$(\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S}) \circ \underset{\sim}{Q} = (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{Q}) \cup (\underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{Q})$

3） $(\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S})^T = \underset{\sim}{S}^T \circ \underset{\sim}{R}^T$ （T 表示转置）

4） $I \circ \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R} \circ I = \underset{\sim}{R}$

$O \circ \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R} \circ O = O$

注意，合成运算对于 $\cap$ 一般不满足分配律。

(三) 几种形式模糊关系的合成

在讨论之前，先介绍几个基本概念。

定义　$1\times n$ 的模糊矩阵称为模糊向量，记

$$\underset{\sim}{A} = (a_1, a_2, \cdots a_n), \qquad 0 \le a_i \le 1$$

模糊向量有双重意义：

它表示有限论域 $U = \{u_1, u_2, \cdots u_n\}$ 上的模糊子集 $\underset{\sim}{A}$，其分量定义为

$$a_i = \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_i), i = 1, 2, \cdots, n$$

它作为矩阵，又代表一个模糊关系。

设 $\underset{\sim}{A}$ 表现的模糊概念名称为 a，定义从名称集 $\{a\}$ 到 U 的一个模糊关系为

$$\underset{\sim}{A}^* : \quad \{a\} \sim \xrightarrow{\underset{\sim}{A}^*} U$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}^*}(a, u_i) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_i) = a_i$$

把$\underset{\sim}{A}^*$用矩阵形式写出来，就是模糊向量$\underset{\sim}{A}$。以后将$\underset{\sim}{A}^*$直接记成$\underset{\sim}{A}$.

把论域U上的一个模糊集看作是从它的概念名称到U的一个模糊关系，这一思想是十分有意义的，也正是应用合成规则解决大量实际问题的基础。

(1) 合成形式 I（叉积）

定义　设$\underset{\sim}{A}\in M_{1\times n}$，$\underset{\sim}{B}\in M_{1\times m}$，记

$$\underset{\sim}{A}\times\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}^T\circ\underset{\sim}{B}$$

叫做模糊向量$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的笛卡尔乘积，简称叉积。

在实际应用中，考虑如下情况：

设模糊向量$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$分别是同一概念a在不同论域U和V上的表现，把$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$理解为模糊关系

$$U\sim\xrightarrow{\underset{\sim}{A}^T}\{a\},\quad \{a\}\sim\xrightarrow{\underset{\sim}{B}}V$$

按照模糊关系的合成运算，应有

$$U\sim\xrightarrow{\underset{\sim}{A}^T\cdot\underset{\sim}{B}}V$$

即$\underset{\sim}{A}\times\underset{\sim}{B}$表现了论域的转换关系，用不同论域表现同一概念时，这两个论域的元素之间便发生了一定的联系，$\underset{\sim}{A}\times\underset{\sim}{B}$就表现了论域$U$和$V$元素间存在的联系（关系）。

(2) 形式 II（内积）

定义　设$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}\in M_{1\times n}$，记$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}^T$　叫做$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的内积。

一般的有

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}=\bigvee_{i=11}^{n}(a_i\wedge b_i)$$

下面我们分析$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$内积的意义。

设有两个模糊概念α,β，它们在同一论域$U=\{u_1,u_2,\cdots u_n\}$上表现为两个模

糊子集$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$，将$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$都看作模糊关系矩阵，表现模糊关系

$$\{a\}\sim\xrightarrow{\underset{\sim}{A}}U,\qquad U\sim\xrightarrow{\underset{\sim}{B}^T}\{\beta\}$$

按模糊关系合成的意义，应有

$$\{a\}\sim\xrightarrow{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}^T}\{\beta\}$$

故$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}$表示同一论域的两个模糊概念之间的相关程度。

(3) 形式 III（变换）

设有限论域$U=\{u_1,u_2,\cdots u_n\}$和$V=\{v_1,v_2,\cdots v_m\}$，$\underset{\sim}{R}$是从U到V的一个模糊关系，相应模糊矩阵为$\underset{\sim}{R}=[r_{ij}]_{n\times m}$，则$U\times V$上的模糊关系$\underset{\sim}{R}$决定了一个模糊变换，其直观意义可以解释为一种论域的转换。

设有一个概念a，它在论域U上表现为模糊向量$A=(a_1,a_2,\cdots a_n)$,U上模糊集$\underset{\sim}{A}$与U到V上的模糊关系$\underset{\sim}{R}$的合成$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}\in M_{1\times m}$是一个模糊向量。因为

$$\{a\}\sim\xrightarrow{\underset{\sim}{A}}U,\qquad U\sim\xrightarrow{\underset{\sim}{R}}V$$

按模糊关系合成定义，应有

$$\{a\}\sim\xrightarrow{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{R}}V$$

由此可见，$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}$可以表现同一概念$a$在论域$V$上的模糊向量。正是在这个意义上，才说$\underset{\sim}{R}$决定了一个模糊变换，或说$\underset{\sim}{R}$是一个论域转换器。

§4—3 模糊综合评价（综合决策）（90 分钟）

综合评判又称多元决策，是系统工程的必要环节之一。模糊综合评判的第一个初始模型是由汪培庄教授提出的，并且受到了应用工作者的极大重视。目前，在国内应用这一模型解决生产实际问题的成果较多。

（一）初始的综合评判模型

［例］　服装的评判

设对某一种服装进行评判，取U为着眼因素集合，取V为评语集合。

$U=\{$花色样式、耐穿程度、价格费用$\}$

$V=\{$很欢迎、比较欢迎、不太欢迎、不欢迎$\}$。

对一批人进行调查，单就花色样式考虑，有 20%的人很喜欢，有 70%的人比较喜欢，10%的人不太喜欢，便可以认为，单就花色样式这一因素而言，该服装应得的评价为（0.2，0.7，0.1，0）。有假设，单就耐穿程度对该服装所作的评价（0，0.41，0.5，0.1）；单就价格费用所作的评价为（0.2，0.3，0.4，0.1）。于是，可以写出单因素评判矩阵

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.74 & 0.1 & 0\\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1\\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1\end{bmatrix}$$

假如我们选的是某种类型（职业、性别、年龄、民族，……）的顾客，事先知道这类顾客对U中三个因素的权数分配为

$$\underset{\sim}{A}=(0.2,0.5,0.3)$$

则由矩阵的合成运算，可以得出该类顾客对这种服装的综合评判为

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{B}=(0.2,0.5,0.3)\circ\begin{bmatrix}0.2 & 0.74 & 0.1 & 0\\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1\\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1\end{bmatrix}=(0.2,0.4,0.5,0.1)$$

若将综合评价向量归一化，则综合评判为：

$$(\frac{0.2}{1.2},\frac{0.4}{1.2},\frac{0.5}{1.2},\frac{0.1}{1.2})=(0.17,0.34,0.41,0.08)$$

下面对模糊综合评价的初始模型做一个概括。

设评价因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，评语集$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$。根据被评价对象建立单因素评价矩阵

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

其中$r_{ij}\in[0,1]$表示从因素u_i着眼，对被评对象做出v_j评语的可能程度。

给定各因素的权重分配，记为

$$\underset{\sim}{A}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$$

其中a_i是因素u_i的评价权重，有$a_i\ge 0$且$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$． 应用模糊矩阵的复合运算，得到模糊综合评价

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{B}=\left(b_1,b_2,\cdots,b_m\right)$$

这个综合评价模型虽然简单，但却具有相当普遍的应用意义。

例　农业气候条件分析

在评价一个地区气候条件是否适宜种植橡胶树时，需要考虑影响橡胶树生长的诸多气候条件因素。取评价因素集$U=\{$年平均气温u_1，年极端最低气温u_2，年平均风速$u_3\}$，取评语集$V=\{$很适宜v_1，适宜v_2，较适宜v_3，不适宜$v_4\}$.

考虑南宁和万宁两地区是否适宜种植橡胶树，经专家研究，分别建立这两个地区的单因素评价矩阵

$$\underset{\sim}{R}_{南宁}=\begin{bmatrix} 0.42 & 0.58 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.26 & 0.74 \\ 0 & 0.11 & 0.26 & 0.63 \end{bmatrix},\quad \underset{\sim}{R}_{万宁}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.95 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.11 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

考虑种植橡胶树以年极端最低气温至为重要，年平均气温次之，风速不太重要，故取评价权重为

$$\underset{\sim}{A}=(0.19,0.80,0.01)\text{.}$$

利用模糊变换，得到综合评价为

$\underset{\sim}{B}_{南宁}=\underset{\sim}{A}\circ R_{南宁}=$（0. 19, 0. 19, 0. 26, 0. 74）

$\underset{\sim}{B}_{万宁}=\underset{\sim}{A}\circ R_{万宁}=$（0. 80, 0. 05, 0, 0. 01）

结论表明，万宁地区适宜种植橡胶树，而南宁地区不适宜。

（二） 广义模糊运算下的综合评判模型

在上述的评价模型中，模糊变换 $\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{B}$ 运用了 $\wedge$ 和 $\vee$ 合成规则，因此记作 $M(\wedge、\vee)$ 型，$\wedge$ 和 $\vee$ 这两个运算虽然简洁明了，但是评价灵敏度不高，或者说丢失信息太多，这一点从下面的例子中可以看出来。

设有两个评价矩阵：

$$\underset{\sim}{R}_1=\begin{bmatrix}0.8&0.2&0&0\\0.4&0.3&0.3&0\\0.8&0&0.2&0\\0.7&0.1&0.1&0.1\end{bmatrix},\qquad \underset{\sim}{R}_2=\begin{bmatrix}0.4&0.3&0.3&0\\0&0.2&0.7&0.1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

设着评价的权重分配 $\underset{\sim}{A}=(0.4,0.3,0.2,0.1)$，不难得到

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}_1=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}_2=(0.4,0.3,0.3,0.1)$$

容易看出，$\underset{\sim}{R}_2$ 比起 $\underset{\sim}{R}_1$ 来，明显地重心后移，因此，对应的评价 $\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}_2$ 也应重心后移，但是，这里的评价却是相同的，所以，这种评价有些不合情理，模糊关系的合成运算是应该改进的，为此引入广义模糊运算。

定义　一个广义的模糊“与”运算 $\cap$ 是一个映射

$$\cap：\ I\times I\to I, I=[0,1]$$

满足：

① 对每一变量在 I 内连续、单调增加；

② $\forall a,b \in I$； $a \cap b = b \cap a$；

③ $\forall a \in I$， $a \cap 0 = 0$， $a \cap 1 = a$；

④ $\forall a,b,c \in I$，$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$

类似地可以定义广义模糊“或”运算$\cup$，只要把$\cap$换成$\cup$，再把③改成

$$\forall a \in I,\ a \cup 1 = 1,\ a \cup 0 = a$$

即可。

可以看出，算子$\wedge$和$\vee$是广义运算$\cap$和$\cup$的特例。在模糊综合决策模型$M(\wedge、\vee)$中，将模糊关系合成使用的$\wedge, \vee$运算用$\cap, \cup$替换，便得到广义模糊合成运算的综合评价模型，记为$M(\cap、\cup)$：

$$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{B} = \left(b_1, b_2, \cdots, b_m\right)$$

其中，对于 $j = 1, 2, \cdots, m$，有

$$\begin{aligned} b_j &= (a_1 \cap r_{1j}) \cup (a_2 \cap r_{2j}) \cup \cdots \cup (a_n \cap r_{nj}) \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} (a_k \cap r_{kj}) \end{aligned}$$

（三） 模糊综合评价的应用

介绍权重确定的层次分析法；

【例子】教师课堂教学质量评价；企业管理水平的评价；软件的评价等等。

对于因素及和评语集在实际问题中的具体方法；

（四） 模糊综合评价技术的改进研究

包括：1、多级（层次）评价方法；

2、具有模糊数的评价问题；

3、模糊综合评价的适度分析法。

讨论（20分钟）

1、设 U={王平，李兵，刘海，张浩}，V={语文，算术，英语，常识}，他们的成绩单如下：

	语文	算术	英语	常识
王平	94	100	98	80
李兵	88	95	85	73
刘海	95	100	90	83
张浩	81	84	92	80

用分数表示掌握所学知识的程度，试构造从 U 到 V 的一个模糊关系 R:“掌握所学知识的程度”。

作业安排及课后反思

教材第五章习题以及下题。

1、设 X={2，4，6，8，10，12，14}，写出如下关系：

（1）X 上的“相等”关系 R_1；

（2）X 上的“小于”关系 R_2；

（3）X 上的“大得多”关系 R_3。

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了电子教案和文字教案（本课程实施大纲）。本课程无其他特

殊要求。

参考资料

[1] 张国立，张辉，孔倩. 模糊数学基础及应用. 化学工业出版社, 2011. 第五章

[2] 谢季坚. 模糊数学及其应用(第二版). 武汉: 华中理工大学出版社, 2000. 第五章

[3] 罗承忠. 模糊集引论(上下册). 北京: 北京师范大学出版社，1989. 第四章

[4] 李柏年. 模糊数学及其应用. 合肥：合肥工业大学出版社. 2007. 第五章

第五章 模糊聚类分析

教学日期： 2016.4.18，2016.4.20，2016.4.25

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点、难点：本章介绍模糊等价关系的定义，同时介绍经典等价关系可以决定一个分类的思想。在此基础上，引入模糊相容关系的传递闭包概念，给出求传递闭包的方法。重点向同学们讲解基于模糊等价关系的聚类分析方法和模糊 ISODATA 聚类方法，并列举一些应用实例。使同学真正掌握并会利用模糊聚类分析解决实际问题。

教学内容

§5－1 模糊等价关系（80 分钟）

由于有限集上的普通关系和模糊关系的运算及性质可用相应的矩阵来表示，因此，可以很自然的给出模糊关系的性质。

（一）自反性

设 $\underset{\sim}{R}$ 是集合 X 上的模糊关系，对于每一个 $x \in X$，有 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,x)=1$ 成立，则称 $\underset{\sim}{R}$ 是自反的。

（二）对称性

设 $\underset{\sim}{R}$ 是集合 X 上的模糊关系，对于 $\forall < x_i, x_j > \in X \times X$，若有

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_i, x_j) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_j, x_i)$$

成立，则称 $\underset{\sim}{R}$ 是对称的。

（三）传递性

设 $\underset{\sim}{R}$ 是集合 X 上的模糊关系，对于 $\forall (x_i, x_j), (x_j, x_k), (x_i, x_k) \in X \times X$，若

均有

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_i,x_k)\ge\bigvee_j[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_i,x_j)\wedge\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_j,x_k)]$$

成立，则称 $\underset{\sim}{R}$ 是传递的，其相应的矩阵满足

$$M_{\underset{\sim}{R}}\circ M_{\underset{\sim}{R}}\le M_{\underset{\sim}{R}}$$

定义 1. 若 $\underset{\sim}{R}$ 满足自反性和对称性，则称 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊相容关系，若 $\underset{\sim}{R}$ 满足自反性、对称性和传递性，则称 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊等价关系，相应的矩阵称为模糊相容矩阵和模糊等价矩阵，

例 1. 下面的模糊矩阵

$$M_{\underset{\sim}{R}}=\begin{pmatrix}1&0.4&0.8&0.5&0.5\\0.4&1&0.4&0.4&0.4\\0.8&0.4&1&0.5&0.5\\0.5&0.4&0.5&1&0.6\\0.5&0.4&0.5&0.6&1\end{pmatrix}$$

就是模糊等价矩阵，可以验证满足 $M_{\underset{\sim}{R}}\circ M_{\underset{\sim}{R}}\le M_{\underset{\sim}{R}}$，则 $\underset{\sim}{R}$ 表示的关系为模糊等价关系。

定义 2 设 $\underset{\sim}{R}=[r_{ij}]_{n\times n}$，若 $t(\underset{\sim}{R})$ 满足：

（1） $t(\underset{\sim}{R})^2\le t(\underset{\sim}{R})$

（2） $t(\underset{\sim}{R})\ge\underset{\sim}{R}$

（3）、设 $\underset{\sim}{R}_1$ 是传递矩阵，且 $\underset{\sim}{R}_1\ge\underset{\sim}{R}$，必有 $\underset{\sim}{R}_1\ge t(\underset{\sim}{R})$，则称 $t(\underset{\sim}{R})$ 为 $\underset{\sim}{R}$ 的传递闭包。

定理 1. 设 $\underset{\sim}{R}$ 是论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$ 上的模糊关系，则

$$t(\underset{\sim}{R})=\sum_{k=1}^{n}\underset{\sim}{R}^k$$

例 2 设$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.3 & 0.8\\0.4 & 0.2 & 0.9\\0.8 & 0.5 & 0.3\end{pmatrix}$，则 $\underset{\sim}{R}^2=\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 0.8\\0.8 & 0.5 & 0.4\\0.8 & 0.3 & 0.8\end{pmatrix}$， $\underset{\sim}{R}^3=\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 0.8\\0.8 & 0.4 & 0.8\\0.8 & 0.5 & 0.8\end{pmatrix}$，

故

$$t(\underset{\sim}{R})=\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{R}^2\cup\underset{\sim}{R}^3=\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 0.8\\0.8 & 0.5 & 0.9\\0.8 & 0.5 & 0.8\end{pmatrix}$$

定理 2 设$\underset{\sim}{R}$是论域$X=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$上的模糊相容关系（不满足传递性），则$t(\underset{\sim}{R})$为模糊等价关系。

具体求法：$\underset{\sim}{R}\to\underset{\sim}{R}^2\to\underset{\sim}{R}^3\to\cdots\to\underset{\sim}{R}^l=\underset{\sim}{R}^{l+1}=\cdots=\underset{\sim}{R}^n$，则$t(\underset{\sim}{R})=\underset{\sim}{R}^l$

加速求法：$\underset{\sim}{R}\to\underset{\sim}{R}^2\to\underset{\sim}{R}^4\to\cdots\to\underset{\sim}{R}^{2^k}=\underset{\sim}{R}^{2^{k+1}}$，则$t(\underset{\sim}{R})=\underset{\sim}{R}^{2^k}$

此定理告诉我们，一个模糊相容关系，总可以“自乘”的方式改造成为一个模糊等价关系，而且这种改造不需要经过无限多次。

例 3 模糊关系

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.1 & 0.8 & 0.5 & 0.3\\0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.4\\0.8 & 0.1 & 1 & 0.5 & 0.5\\0.5 & 0.2 & 0.5 & 1 & 0.6\\0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1\end{pmatrix}$$

具有自反性（$r_{ij}=1$）和对称性（$r_{ij}=r_{ji}$），但不具有传递性，故$\underset{\sim}{R}$为模糊相容关系，而经过“自乘”

$$\underset{\sim}{R}^2=\begin{pmatrix}1 & 0.3 & 0.8 & 0.5 & 0.5\\0.5 & 1 & 0.2 & 0.4 & 0.4\\0.8 & 0.2 & 1 & 0.5 & 0.5\\0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6\\0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1\end{pmatrix}\qquad \underset{\sim}{R}^4=\begin{pmatrix}1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5\\0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4\\0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5\\0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6\\0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1\end{pmatrix}$$

因为$\underset{\sim}{R}^8=\underset{\sim}{R}^4$，则$\underset{\sim}{R}^4$为模糊等价关系。今后我们用$t(\underset{\sim}{R})$代替$\underset{\sim}{R}$进行聚类分析。

§5-2 基于模糊等价关系的模糊聚类分析（50 分钟）

在经典集合论中说明了，分类所根据的关系是等价关系，同样根据模糊等价关系可以进行模糊分类。

定义 3　设 $\underset{\sim}{R}$ 为论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的模糊等价关系，隶属函数记为 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_i,x_j)$，称 R_λ 为 $\underset{\sim}{R}$ 的 λ 截集

$$R_\lambda=\{(x_i,x_j)\mid\mu_{\tilde{R}}(x_i,x_j)\ge\lambda,x_i,x_j\in X\}\qquad(0<\lambda\le1)$$

可见 R_λ 是 $X\times X$ 上的普通子集

定理 3　若 R_λ 是 X 上的模糊等价关系 $\underset{\sim}{R}$ 的 λ 截集，则 R_λ 是 X 上的普通等价关系。

这个定理不作证明，同学们可以通过验证的方法看出其正确性。于是，利用 X 上的普通等价关系 R_λ 可以对 X 进行分类。

例 4　设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix}1&0.4&0.8&0.5&0.5\\0.4&1&0.4&0.4&0.4\\0.8&0.4&1&0.5&0.5\\0.5&0.4&0.5&1&0.6\\0.5&0.4&0.5&0.6&1\end{pmatrix}$$

易验证 $\underset{\sim}{R}$ 是一个模糊等价关系（模糊等价矩阵）。今由 1 降至 0，写出 X 上的普通等价关系 R_λ，并按 R_λ 对 X 分类，若 x_i 和 x_j 分为一类，当且仅当 $\mu_{R_\lambda}(x_i,x_j)=1$。

$$R_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

分类：$\{x_1\},\{x_3\},\{x_2\},\{x_4\},\{x_5\}$，即每个元素自成一类。

$$R_{0.8}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

分类：$\{x_1,x_3\},\{x_2\},\{x_4\},\{x_5\}$，即 x_1 和 x_3 归为一类，其他自成一类。

$$R_{0.6}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

为类：$\{x_1,x_3\},\{x_2\},\{x_4,x_5\}$。

$$R_{0.5}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

为类：$\{x_1,x_3,x_4,x_5\},\{x_2\}$

$$R_{0.4}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

分类：$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，即五个元素分为一类。

聚类图：

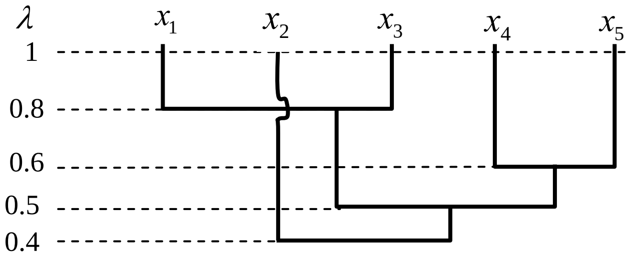


图 1-10 系统聚类图

§5-3 模糊聚类分析的步骤（60 分钟）

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是待分类的对象集合， $C_1,C_2,\cdots,C_m$ 是分类所依据的 m 个指标，其中对象 x_i 所对应的指标为 $(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im})$，$i=1,2,\cdots,n$. 将 n 个对象进行分类的步骤如下。

（一）标定

即确定对象 x_i 与 x_j 的相似系数（相关程度）r_{ij}，标定的方法可以依据实际问题选择公式（见教材)；

（二）写出矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$

所有标定方法满足：$r_{ij}=r_{ji}$，$r_{ii}=1$， $\underset{\sim}{R}$ 为相似矩阵（相容关系)。

（三）聚类

利用“自乘”方法将 $\underset{\sim}{R}$ 改造成模糊等价关系 $\underset{\sim}{R}^*$，然后，利用 $\underset{\sim}{R}^*$ 的 λ 截集得到系统聚类图。在适当的阈值上进行截取，便可得到需要的分类。

应用实例 2 预报煤与瓦斯突出

取三个判断煤层具有突出危险的强弱指标：

x_1 为瓦斯用处初速度；

x_2 为钻粉量；

x_3 为煤层坚固性系数 f 的倒数，即 $x_3=1/f$.

实践经验证明，这几个指标的选取大小都与煤层存在的突出危险性成正比。现共测得九个采掘工作面的实测数据（样品）$u_1,u_2,\cdots,u_9$，数据见表所示。

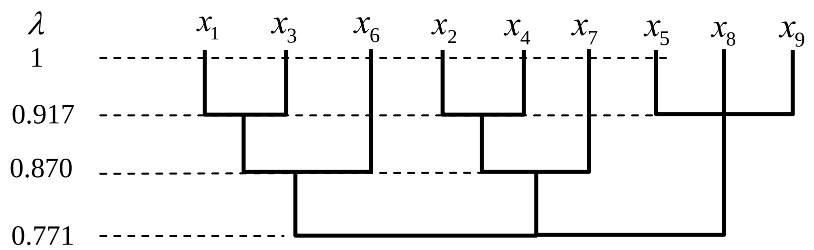
利用算术平均最小值公式，计算出各样品间的相似系数。以相似系数为元素，建立样品集上的模糊相容关系矩阵 $\underset{\sim}{R}$，然后利用“自乘”方法求出 $\underset{\sim}{R}$ 的传递闭包 $\underset{\sim}{R}^*=\underset{\sim}{R}^8$ 。分类结果如下：

取 $\lambda=1$ 时，各样品自成一类：$\{u_1\},\{u_2\},\cdots,\{u_9\}$

取 $\lambda=0.917$ 时，样品分成五类：$\{u_1,u_3\},\{u_2,u_4\},\{u_5,u_8,u_9\},\{u_6\},\{u_7\}$

取 $\lambda=0.87$ 时，样品分成三类：$\{u_1,u_3,u_6\},\{u_2,u_4,u_7\},\{u_5,u_8,u_9\}$

取 $\lambda=0.771$ 时，样品归为一类：$\{u_1,u_2,\cdots,u_9\}$



系统聚类图

从历史资料分析，取 $\lambda=0.87$ 时的分类是符合实际情况的。根据所掌握的资料认为，$\{u_5,u_8,u_9\}$ 为严重突出危险型，$\{u_2,u_4,u_7\}$ 为一般突出危险型，$\{u_1,u_3,u_6\}$ 为无突出危险型。把上述的分类作为煤矿瓦斯突出预报的模式，对于给定的待预报样品，可以采取如下的判决方法来判断其归属哪一类型：

（1）计算出带预报样本 y 与原来每个样品 $u_i(i=1,\cdots,9)$ 间的相似系数，

其方法采用原公式（算术平均最小值公式）；

（2）若 y 与样品 u_i 的相似系数最大，且 u_i 属于第 k 类 $(k=1,2,3)$，则预报 y 属于 k 类型。

现有预报样品：$y_1=(48,7.3,3.33), y_2=(23.5,5.3,1.43).$

按上述方法计算，得到 y_1 与第一类（严重突出危险型）中样品相似系数最大，为 0.966，y_2 与第二类（一般突出危险型）中样品相似系数最大，为 0.941，故判定 y_1 属于严重突出危险型，y_2 属于一般突出危险型。进而，可以采取相应的措施进行防治，以确保安全生产。

	x_1	x_2	x_3
u_1	10	3.4	0.91
u_2	32	4.3	1.25
u_3	8.5	3.5	1.11
u_4	27	5	1.43
u_5	50	6.6	5
u_6	13	3	0.83
u_7	20	4.8	2
u_8	42	6.8	4.35
u_9	40	6.3	3.33

§5－4 模糊 ISODATA 聚类方法（70 分钟）

（迭代自组织分析技术）

这种聚类方法也称为软分类法，分类的结果是利用“迭代自组织分析技术”（ISODATA）确定出所分类别的各类中心位置，并使各自类别中的样品与其聚类中心的距离尽量小。

设待分类的样品集为 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，每个样品有 m 个数量指标 $X_1,X_2,\cdots,X_m$，样品 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的向量表示为

$$u_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im}),x_{ik}\in X_k,k=1,2,\cdots,m.$$

（1）、硬化分

我们将 U 划分为 c 个类，这个划分可以用一个分类矩阵 $R=\left[r_{ij}\right]_{c\times n}$ 表示，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}0,\text{ 样品}u_j\text{不属于第}i\text{类}\\1,\quad\text{ 样品}u_j\text{属于第}i\text{类}\end{cases}$$

并且，R 满足条件。

（I） $r_{ij}\in\{0,1\}$；

（II） R 的每一列只有一个元为 1，其余为 0；

（III）每行之和大于零，即每类都不空。

称这种划分为对 U 的硬划分。

将 n 个样品分为 c 类的方法有多种分法，相应可以写出许多分类矩阵。我们需要求得一个最佳的分类。

设第 j 类样品集合为 $\{u_1^{(j)},u_2^{(j)},\cdots,u_{k_j}^{(j)}\}$，其中样品

$$u_i^{(j)}=\{u_{i1}^{(j)},u_{i2}^{(j)},\cdots,u_{im}^{(j)}\}$$

称向量 $v_j=(v_{j1},v_{j2},\cdots,v_{jm})$ 为第 j 类的聚类中心，这里

$$v_j=\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}u_i^{(j)}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}r_{ji}}\sum_{i=1}^{n}r_{ji}\cdot u_i^{(j)}$$

$$v_{jk}=\frac{1}{k_j}\sum_{i=1}^{k_j}x_{ik}^{(j)}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}r_{ji}}\sum_{i=1}^{n}r_{ji}\cdot x_{ik}$$

$k=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,c,$ 即聚类中心的各分量是该类中诸样品相应分量的平均值。所谓一个最佳分类是使聚类判据

$$J(R,v)=\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{n}r_{ji}\left\|u_i-v_j\right\|^2$$

达到最小的一个分类。式中 $\left\|u_i-v_j\right\|^2$ 表示向量 u_i 与 v_j 的距离平方。

（2）、软化分

在许多现实的分类问题中，类别本质是模糊的，一个样品并非绝对地属于哪一类，可能同时具有几个类别的特征。此时，分类矩阵是一个模糊矩阵 $\underset{\sim}{R}=[r_{ij}]_{\sigma\times n}$， $r_{ij}\in\{0,1\}$ 表示第 j 个样品属于第 i 类的可能程度，这种分类叫做对 U 的软划分。软划分的分类矩阵满足条件

（I） $r_{ij}\in\{0,1\}$；

（II） $\sum_{i=1}^{c}r_{ij}=1$，即对每一个样品而言，它对各类的隶属度之和为 1；

（III） $\sum_{j=1}^{n}r_{ij}>0$，即保证每类都不空。

我们依然按照硬划分中最佳分类的思想，建立一种分类准则，在 U 上做一个最佳划分。

将判据作如下推广：

$$J_k(R,v)=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}(r_{ij})^k\left\|u_j-v_i\right\|^2$$

聚类的准则是求出分类矩阵 $\underset{\sim}{R}$ 及聚类中心 v，使得上式所表示的泛函数达到最小。参数 K 是为了加强样品属于各类隶属度的对比度，K 越大则分类越模糊。一般取 $K>1$。

（3）、ISODATA 聚类方法的计算方法

本问题求解相当困难。当 $K>1$ 及 $\forall i,j,u_j\neq v_i$ 时，我们介绍 Bezdek 的算法，关于分类矩阵元 r_{ij} 和各聚类中心 v_i 的计算公式为

$$r_{ij}=[\sum_{i=1}^{c}(\frac{\left\|u_j-v_i\right\|}{\left\|u_j-v_i\right\|})^{\frac{2}{k-1}}]^{-1} \qquad \forall i,j \qquad （1）$$

$$v_i=\frac{\sum_{j=1}^{n}(r_{ij})^k\cdot u_j}{\sum_{j=1}^{n}(r_{ij})^k} \qquad \forall i \qquad （2）$$

具体聚类的计算步骤如下：

a) 任选一个初始软分类矩阵（可根据经验）$\underset{\sim}{R}$；

b) 由 $\underset{\sim}{R}$ 及（2）式，计算聚类中心 $v_i\ (i=1,2,\cdots,c)$；

c) 由 v_i 及（1）式，计算出新的分类矩阵 $\underset{\sim}{R}^*=[r_{ij}^*]$；

d) 对于预先给定的小正数 ε（如 $10^{-2},10^{-3},\cdots$），如果 $\max\limits_{i,j}[\left|r_{ij}^*-r_{ij}\right|]<\varepsilon$，则 r_{ij}^* 及相应得到的 v_i^* 即是所求结果，否则再返回到 b。其中 ε 越小，结果越精确，但计算量也越大。

（4）、应用举例：

【例子】、基于等形块段的煤田地质分类。（阜新矿院 84 级地质专业学生的毕业论文）

作业安排及课后反思

1、论域 X={1，2，……，10}，定义：

$$[大]=A=\frac{0.2}{4}+\frac{0.4}{5}+\frac{0.6}{6}+\frac{0.8}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$[小]=\ B=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.4}{4}+\frac{0.2}{5}$$

求：C=[不大]，D=[不小]，E=[或大或小]，F=[不大也不小]。

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了电子教案和文字教案（本课程实施大纲）。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 张国立，张辉，孔倩. 模糊数学基础及应用. 化学工业出版社, 2011. 第五章

[2] 谢季坚. 模糊数学及其应用(第二版). 武汉: 华中理工大学出版社, 2000. 第六章

[3] 罗承忠. 模糊集引论(上下册). 北京: 北京师范大学出版社, 1989. 第五章

[4] 李柏年. 模糊数学及其应用. 合肥：合肥工业大学出版社. 2007. 第六章

课程要求

1、学生自学要求

学生应在上课前对即将学习的章节进行预习，提出问题。已学章节的复习由学生在课余自行安排时间，课堂上不安排复习。除了教材上的内容外，要求学生阅读一些相关著作，如下述课外阅读要求中所列著作或其他。

2、课外阅读要求

[1] 刘合香. 模糊数学理论及其应用. 北京：科学出版社，2012.

[2] 谢季坚. 模糊数学及其应用(第二版). 武汉: 华中理工大学出版社, 2000

3、课堂讨论要求

讨论目的要明确。教师应提出与当堂课程内容有关的、合理而有价值的讨论题目，激发学生思考，避免提出学生知识结构不能达到的问题。

分组合理分工明确。可自由组合，也可按观点的异同进行分组。可先分组讨论再全班讨论。学生应积极参与。

教师应是组织者和指导者。教师应适当控制讨论局面，使得性格内向的学生也有发言机会，但教师不宜发言过多，左右学生的思维。

课堂规范

课堂纪律

1、教师需在上课前 10-15 分钟到达上课教室，做好课前准备，比如检查有无粉笔黑板刷，开多媒体，检查多媒体能否正常使用。学生需在上课前 5-10 分钟到达上课教室。迟到的学生从教室后门进入教室，不能影响老师和其他学生上课，并在下课后主动向老师说明迟到原因。

2、课堂上教师不能抽烟喝酒，不能吃东西，不能接打电话，手机调为震动或静音。非特别紧急的情况下不能上厕所。

3、课堂上学生不能抽烟喝酒，不能吃东西，不能交头接耳，不能做与本课程无关的事（如做作业，听音乐），不能接打电话，不能玩手机，手机调为震动或静音。需要上厕所举手示意，教师同意后方可出教室。

4、教师上课使用普通话。学生发言或提问要举手，经老师同意并起立用普通话表达。

课堂礼仪

1、教师和学生均需整齐着装，不能穿拖鞋，吊带背心进入教室。

2、教师和学生在上课过程中均应注意语言文明，相互尊重。

3、教师上完课应关闭多媒体和多媒体机柜。如果课程为上午（下午、晚上）最后一节课，最后离开教室的老师或学生应关闭教室的所有灯光。

课程考核

1、出勤（迟到、早退等）、作业、报告等的要求

一学期教师至少随机抽 1/3 的课时点名，严禁不假不到。病假事假需相应的请假条（所在学院负责老师签字）。学生按时保质保量完成作业，由组长收发作业。

2、成绩的构成与评分规则说明

平时成绩 40% （其中考勤 20%，作业 20%）+ 考核成绩 60%

说明：有点名未到的情况，总评成绩不能为“优秀”；作业未完成者，不能得“良好”以上的等级。

3、考试形式及说明

考试形式：小论文 + 考试或知识点考核（如书上重要定理的证明）

说明：点名超过 1/3 未到，不能参加考核。

学术诚信

本课程的考核过程中，若出现学生考试违规与作弊，抄袭他人论文或其他伪造成果的行为，按四川理工学院相应政策处理。

课程资源

1、教材与参考书

本课程教材为：《模糊数学基础及应用》，张国立，张辉，孔倩著，化学工业出版社（2011）。

本课程参考书目

[1] 谢季坚. 模糊数学及其应用(第二版). 武汉: 华中理工大学出版社, 2000

[2] 罗承忠. 模糊集引论(上下册). 北京: 北京师范大学出版社, 1989

[3] 李柏年. 模糊数学及其应用. 合肥：合肥工业大学出版社. 2007

[4] 谢季监，刘承平. 模糊数学方法及应用. 武汉: 华中科技大学出版社, 2000.

2、专业学术著作

《模糊数学》是一门新兴学科，内容有一定的抽象性，后三章与实际联系紧密。与《模糊数学》有关的学术著作，除上述参考书目外，还有如下著作（不能完全列出）。

[1] 刘合香. 模糊数学理论及其应用. 北京：科学出版社，2012.

[2] 曾光奇，胡均安. 模糊控制理论与工程应用. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006.

[3] 蔡文娱. 模糊数学在水质动态变化综合评价中的应用. 科技广场，2009.3： 14-16.

[4] 朱小虎. 模糊数学在膝关节骨性关节炎诊断和疗效评价中的应用.

湖北中医药大学博士论文，2013.

3、专业刊物

《模糊系统与数学》、《科技导报》、《环境科学与管理》、《制造业自动化》、《科技广场》、《水处理技术》、《实验技术与管理》、《中国烟草学报》、《弹箭与制导学报》等刊物，以及一些高校学报均可刊登模糊数学方面的文章。

4、网络课程资源

爱课程：http://www.icourses.cn

中国大学 MOOC：http://www.icourse163.org/

网易公开课：http://open.163.com/

5、课外阅读资源

[1] 曾光奇，胡均安. 模糊控制理论与工程应用. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006.

[2] 席爱民, 模糊控制技术. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2008.

[3] 李国勇. 神经模糊控制理论及应用. 电子工业出版社，2009.

教学合约

本人已阅读《模糊数学》课程实施大纲，理解了其中内容。本人同意遵守课程实施大纲中阐述的标准和期望，并将本课程的重点、难点、课程要求、课堂纪律，课堂礼仪、考核形式及要求传达给学生。