四川理工学院课程实施大纲

课程名称：近世代数

授课班级：应数 2013 级 1,2 班

任课教师：卢天秀

工作部门：理学院

联系方式：13408138464

四川理工学院 制

2015 年 8 月

《近世代数》课程实施大纲

基本信息

课程代码：

课程名称：近世代数

学　　分：3

总 学 时：45

学　　期：2015-2016 上期

上课时间：1-12 周，周二下午 7、8 节，周三晚上 11、12 节。

上课地点：N1-510，N1-412,

答疑时间和方式：每周一下午 7,8 节当面答疑；随时可以电话、短信、邮件、QQ 答疑。

答疑地点：厚德楼 325

授课班级：应数 2013 级 1,2 班

任课教师：卢天秀

学　　院：理学院

邮　　箱：lubeeltx@163.com

联系电话：13408138464

目　录

教学理念

古有“一日为师，终身为父”、“师者，传道、授业、解惑也”的说法，今有“春蚕到死丝方尽，蜡炬成灰泪始干”的名句，“身为世范，为人师表”的谨言，可见教师在学生成长和发展中的不可取代的重要作用。因此，教师在日常的教学活动中，就要时时关注学生的需要与发展。

1、以人为本。重视教育对象，尊重教育对象，爱护教育对象，赏识教育对象，提升和发展人的精神文化品质。公平对待每一个学生，不以个人的私利和好恶为标准。现代教育的特征就是发展人的主体性，教师不能一直充当“主角”，而让学生仅仅充当的是“配角”，剥夺了他们自主学习的权利。通过学习和教育达到自身的和谐发展，是人类认识自然和社会、不断完善和发展自我的必由之路。

2、全面发展。人的全面发展是社会发展的根本问题，也是教育的根本目的和价值取向。人的全面发展理论是马克思主义理论的重要组成部分。在教学过程中，教师应注重学生知识结构的完整性和全面性，在学习专业知识的同时，提高思想道德素质和文化素质。知识、技能，过程、方法与情感、态度、价值观三维目标的整合。即，相对于人的发展这一总目标，任一维度的目标都不能脱离整体而单独优质服务，缺失任一维度都无法实现真正意义上的发展。

3、素质教育。更加注重教育的过程，将传授知识和培养创造性思维结合，通过点拨、启发、引导和训练，挖掘学生的潜力，提高主观能动性。培养学生的自学能力、实践能力、创新能力。鼓励学生积极反思、大胆批

判和实践运用。通过对现实世界的关注，使学生得到情感体验、人格提升、个性张扬，同时使教师的职业生命活力得以焕发，师生生命在交往互动、共同经历中不断生成的信念系统。在教育日益专业化的今天，大学教育必须更新教育理念，大力加强素质教育，才能实现对人的改造和自身的重建，培育健全的人格和品质，促进人的全面和谐的发展。

4、因材施教。最早应源于我国古代的教育家，思想家孔子提出的育人要“深其深，浅其浅，益其益，尊其尊”，即“因材施教，因人而异”的主张；原苏联教育家维果茨基的“最近发展区”理论则认为：每个学生都存在着两种发展水平，一是现有水平，二是潜在水平，它们的区域被称为“最近发展区”教学，只有从这两种水平的个性差异出发，把最近发展区转化为现有发展水平，并不断创造出更高水平的最近发展区，才能促进学生的发展；美国学者卡罗尔也提出：“如果提供足够的时间，再具备合适的学习材料和教学环境，那么，几乎所有的学生都有可能达到即定的目标。”不同的学生个体也完全可能由于知识和思维方法等方面的差异，而具有不同的思维过程。因此，在教学中要正确对待学生中客观存在的差异，不过分追求统一性，一致性。教师可以一边组织大多数同学进行针对性的练习，巩固性的练习，一边让学有余力，探究欲望强烈的学生深入探究。

课程介绍

1、 课程的性质

《近世代数》数学专业的一门专业必修课。它是以讨论代数体系的性质与构造为中心的一门学科，它的研究方法和观点，对其他学科产生了越来越大的影响。近世代数是现代数学各个分支的基础，而且随着科学技术的不断进步，特别是计算机的发展与推广，近世代数的思想、理论和方法的应用日趋广泛。

本课程讲授代数中典型的代数系统：群、环、域。将主要介绍近世代数的基本概念与基本理论。主要介绍群、环、域等理论。

2、 课程在学科专业结构中的地位、作用

抽象代数学随着数学中各分支理论的发展和应用需要而得到不断的发展。经过伯克霍夫、冯.诺伊曼、坎托罗维奇和斯通等人在 1933-1938 年所做的工作，格论确定了在代数学的地位。而自 20 世纪 40 年代中叶起，作为线性代数的推广的模论得到进一步的发展并产生深刻的影响。泛代数、同调代数、范畴等新领域也被建立和发展起来。

现代数学的基础课程正在更新。50 年代数学系的教学计划，以“高等微积分”、“高等代数”、“高等几何”为主体。时至今日，人们认为光靠这“老三高”已不够用了，应该发展“新三高”，即抽象代数、拓扑学和泛函分析。现代数学理论是由这三根支柱撑着的。现在，我们来追寻它们形成和发展的历史足迹，并从这一侧面窥视 20 世纪数学的特征。

3、 学习本课程的必要性

近世代数是现代数学的重要基础，它的概念和思想渗透到几乎所有的数学分支上，而其理论与方法在统计学、信息论、计算机科学、近代物理、化学以及其他许多科学和工程领域中都有广泛而深入的应用，是理工类和其他相关专业高要求的研究生应具备的数学基础。学习近世代数既是后继课程的需要，又能指导中学数学教学与实践，能在高观点下看清数学知识的来龙去脉，还可以培养学生的科学思维、逻辑推理、运算能力以及辩证唯物论观点。

本课程学习之后可以继续研读：群论、环论、模论、李群、李代数、计算机科学、理论物理等。

4、 课程教学要求

讲授本课程要贯彻“夯实基础，培养能力，提高科研水平”的教育方针的基本方针，依据“有用、有效、先进”的指导原则，重点放在培养学生的抽象概括能力、逻辑推理能力、探究能力，分析能力上。

通过本课程的学习，使学生达到：

1）系统地理解和掌握近世代数的基本概念、理论和方法。充分理解和熟记研究对象所具有的性质及相互的关系；

2）提高学生的数学素养。学会将所学的知识联系实际，运用近世代数的方法和技巧分析解决科学技术和工程领域中遇到的有关问题。

3）掌握各种典型结论的论证推理方法，训练严谨缜密的数学思维。

近世代数的定义之间存在层层递进的关系，定理和命题之间的差别往

往只是改变了某个条件，其证明方法也大多存在本质联系。由于教学时数所限，必须通过做练习题来加深对概念的理解和掌握，熟悉各种公式的运用。独立完成作业是学好本课程的重要手段。

教师简介

卢天秀，四川理工学院副教授，博士研究生。1998 年在重庆师范大学数学与计算机系本科毕业；2010 年电子科技大学数学科学学院硕士毕业，研究方向为拓扑学及其应用；2013 年电子科技大学数学科学学院博士毕业，研究方向为混沌理论及其应用。从事教学工作 18 年来，担任过《数学分析》、《高等代数》、《概率论与数理统计》、《近世代数》、《初等数论》、《离散数学》《模糊数学》、《组合数学》、《拓扑学》、《线性代数》、《高等数学》、《高代选讲》等课程的教学。

先修课程

学习《近世代数》这门学科，需要有一些基本的数学理论知识，若先修《数学分析》、《高等代数》等课程，会对其中定义的内涵外延，定理的条件结论和证明理解更加深入，尤其是高等代数的思维方式，与近世代数的思维方式有很大雷同。

课程目标

《近世代数》是数学与应用数学专业的一门重要的专业课，它以讨论代数体系的性质和构造为中心，旨在使学生对群、环、域等代数结构有初步的了解，并培养学生建立抽象思维、增强概括能力、逻辑推理能力、探究能力，分析能力。因此，讲授《近世代数》要从以下几个方面下功夫。

1、让学生了解《近世代数》建立的背景和必要性。了解《近世代数》随着科学技术发展而在理论物理、计算机学科等方面的应用。

2、启迪学生“代数系统”的思维，感受数学的严谨性、系统性和抽象性。

3、让学生系统掌握代数系统中的基本概念与基本理论（主要是群、环、域等理论）；并与《高等代数》中的系统（如线性空间）作对比。

在教学方法上要做到：

1、加强对知识重点与难点的讲解，组织学生进行课堂讨论，促使学生对重点及难点的牢固掌握；

2、加强对学生自学能力的指导与培养；

3、培养学生发现问题，分析问题，解决问题的能力。

课程内容

1、 课程的内容概要

第一章 基本概念（6 学时）

主要内容及要求：

1、集合、映射、代数运算、集合律、交换律、分配律（识记）

2、一一映射和变换、同态、同构、自同构（掌握理解）

3、等价关系与集合的分类（理解）

第二章 群论（18 学时）

主要内容及要求：

1、群的定义（掌握 识记）

2、单位元、乘法表、逆元 （识记）

3、有限群的另一种定义 （理解）

4、群的同态 （掌握 理解）

5、变换群、置换群、循环群 （理解 掌握）

6、子群、子群的陪集、不变子群和商群 （掌握）

7、同态和不变子群（掌握 理解）

第三章 环与域（16 学时）

主要内容及要求：

1、加群、环的定义 （掌握）

2、交换律、单位元、零因子、整环 （理解）

3、除环、域、无零因子环的特征 （理解）

4、子环、环的同态 （理解）

5、多项式环 （了解）

6、理想、剩余类环、同态、最大理想 （理解）

7、商域（了解）

第四章　整环里的因子分解（10 学时）

主要内容及要求：

1、素元、唯一分解环（掌握）

2、主理想、欧式环（理解）

3、多项式环的因子分解、因子分解环与多项式的根（了解）

2、 教学重点、难点

第一章　基本概念

教学重点

1、映射的定义及象与原象的定义，映射相同的定义，代数运算的应用，对代数运算的理解，同态映射及同态满射、同构（同构映射）及自同构的概念及性质；

2、关系、等价关系、集合分类、代表、全体代表团、同余关系及模 n 的剩余类。

教学难点

1、同态映射，同构映射。两个集合之间有同态映射与两个集合同态有何区别。

2、同余关系

第二章　群论

教学重点

1、理解群的第一定义和第二定义，掌握群的判定方法。单位元、逆元的定义和求法。元的阶、消去律、有限群的另一定义。

2、置换，置换群，n 次对称群，k-阶循环置换的定义，利用这些概念的含义证明每一个有限群都一个置换群同构。

3、理解循环群的思想，理解循环群结构中的主要的结果（i）数量问题，(ii)构造问题，（iii）循环群的生成元。

4、理解子群的定义和判定方法，以及构造群子群的方法。

5、子群的左、右陪集的定义，群 G 的子群 H 的阶，H 在 G 里的指数；任两个左（右）陪集间存在双射的概念。不变子群，不变子群的陪集、不变子群的中心，商群的定义。不变子群的判定。

教学难点

1、利用群的定义证明性质和判定；判定一个代数系统时一个群的常用方法，尤其是第一定义的第三个条件。元的阶和群的阶的区别。群的第三个定义的适用范围。

2、置换群的定义，将置换写成不相连的循环置换的乘积；理解 $G=\langle a\rangle$ 的定义，利用 $G=\langle a\rangle$ 的定义，证明有关的定理和命题。

3、子群的几种判定方法如何选取；理解左（右）陪集的思想，理解陪集定义的最基本的两种出发点，利用左（右）陪集的定义掌握左（右）陪集的判别条件。

4、不变子群的判定、商群的定义以及和不变子群的关系。

第三章　环与域

教学重点

1、环的概念及相关性质；理解环这种代数体系中二种运算中的谐调关系。交换环、单位元、逆元的定义和求法。

2、为什么要定义环的零因子，如何求一些常见环的零因子。理解整环、除环、域的概念及相关性质。掌握整环、除环、域的区别和联系，整环的几种判定，域的运算规则和域的判定法则。理解环的特征的定义及性质。

3、掌握子环、子除环、子整环、子域等的定义。环与子环之间的性质“变异”问题。理解环同态（环同构）的相关性质。

4、未定元一元多项式的定义及性质；掌握理想和主理想的定义及表示，理想的各种表现形式。理解剩余类环的定义。在同态映射（或同态满射）之下，子环和理想的“传递性质”。 掌握极大理想的概念和判断极大理想的方法，理解极大理想而获得域的方法。

教学难点

1、环的定义中，将它作为一个群而具有的乘法改称加法，重新再定义的代数运算称为乘法（使得它成为环）。加法相应的单位元，逆元改成了零元、负元，乘法对应的才称为单位元，逆元，因此要注意不要混淆。

2、零因子与消去律的关系；无零因子环的特征的定义及特性；整环、除环、域的区别和联系。

3、环同态的保性质问题；环同态定理 4 的证明。

4、一元多项式环的存在性的证明；生成理想的结构问题和传递问题。由极大理想构造域。

第四章　整环里的因子分解

教学重点

1、 整除、因子、单位、相伴元、平凡因子、真因子、素元、唯一分解等概念和他们之间的一些关系。

2、唯一分解环、公因子、最大公因子、唯一分解环的元互素的定义；唯一分解环的性质；唯一分解环中元素的最大公因子的存在性和性质。

3、主理想环的概念；主理想环与唯一分解环、最大理想的关系。

4、本原多项式及其性质；当多项式的系数所在的环未唯一分解环时，多项式环也是唯一分解环；艾森斯坦判断法。

5、多项式的根和一次因式的关系；多项式的重根的判别方法。

教学难点

1、在具体的整环中求因子、单位、真因子、素元。

2、唯一分解环的两个定义的等价性；唯一分解环中元素的最大公因子的存在性。

3、主理想环与唯一分解环、最大理想的关系。多项式环也是唯一分解环的充分条件。

4、多项式的重根的判别方法。

3、学时安排

教学内容	教学要求	教学方法	重点（☆）	难点（Δ）	学时分配				备注
					讲课	实验	上机	其他	
第一章 基本概念		讲授			6				
1.1-1.3 集合、映射、代数运算	A				1				
1.4-1.6 结合律、交换律、分配律	A				1				
1.7-1.8 一一映射、变换、同态	A		☆	Δ	1				
1.9 同构、自同构	A		☆		1				
1.10 等价关系与集合的分类	B		☆	Δ	2				
第二章 群论		讲授			18				
2.1-2.2 群的定义、单位元、逆元、消去律	A		☆		3				
2.3 有限群的另一定义	B				1				
2.4 群的同态	A		☆	Δ	2				
2.5-2.7 变换群、置换群、循环群	A		☆	Δ	8				
2.8 子群	A		☆		2				
2.9 子群的陪集	A		☆	Δ	2				
2.10 不变子群、商群	B		☆	Δ	2				

2.11　同态与不变子群	B		☆	Δ	2				
第三章 环和域		讲授			16				
3.1　加群、环的定义	A		☆		1				
3.2　交换律、单位元、零因子、整环	A		☆		2				
3.3　除环、域	B		☆		1				
3.4　无零因子环的特征	B		☆	Δ	1				
3.5　子环、环的同态	A		☆		3				
3.6　多项式环	B		☆	Δ	2				
3.7　理想	C			Δ	2				
3.8-3.9 剩余类环、同态、最大理想	C			Δ	3				
3.10 商域	C			Δ	1				
第四章 整环里的因子分解		讲授			10				
4.1-4.2 素元、唯一分解环	A		☆		4				
4.3-4.4 主理想环、欧氏环	C			Δ	2				
4.5 多项式环的因子分解	B		☆	Δ	2				
4.6 因式分解与多项式的根	B		☆	Δ	2				

（教学要求：A—熟练掌握；B—掌握；C—了解）

课程实施

第一章 基本概念

第一讲 集合、映射、代数运算、三大运算律

（教材第一章§1—§6）

教学日期：2015. 9.8

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：映射的定义及象与原象的定义，映射相同的定义；代数运算的应用，对代数运算的理解；代数运算的结合律，交换律和分配律。注重对定理的理解与证明。

难点：代数运算符号与映射合成运算符号的区别；结合律的推广及满足结合律的代数运算的定义；两种分配律与⊕的结合律的综合应用；

教学内容

§1 集合

讲授基本概念（10 分钟）

集合、元素、空集、子集、真子集的定义、集合的关系（包含、相等）与运算（并、交、补、差、对称差、笛卡尔积）以及一些基本关系式。

提问+讨论（5 分钟）

1、表示集合的三种方法

2、笛卡尔积 $X\times Y$ 与 $Y\times X$ 是否相同？举例说明。

例题（5 分钟）

例 1　A = {1. 2. 3}　B = {2. 5. 6} 那么 A∩B = {2}。

A = {1. 2. 3}　B = {4. 5. 6} 那么 A∩B = 空集合.

例 2　A = {1. 2. 3}　B = {2. 4. 6} 那么 A∪B = {1. 2. 3. 4. 6}

A = {1. 2. 3}　B = {4. 5. 6} 那么 A∪B = {1. 2. 3. 4. 5. 6}

§2 映射

讲授基本概念（5 分钟）

回忆象，逆象，映射相等的概念。

提问+讨论（3 分钟）

1、一对一、一对多、多对一，哪些是映射？

例题（8 分钟）

例 2 ：A_1={东,西}，　A_2 = {南}，D = {高，低}

Φ1:（西，南）→高 =Φ_1（西，南）不是一个 $A_1\times A_2$ 到 D 的映射.

Φ2:　(西，南）→高，（东，南）→低，则 Φ_2 是一个 $A_1\times A_2$ 到 D 的映射.

例 4：A_1 = D = 所有实数所成的集合.

Φ：$a\to a-1$ 不是一个 A_1 到 D 的映射.

例 5：A = D = 所有正整数的集合.

Φ1：$a\to 1=\Phi_1(a)$

Φ2: $a\to a^0=\Phi_2(a)$　则 Φ_1 与 Φ_2 是相同的。

§3 代数运算

讲授概念和例题（15 分钟）

代数运算，二元运算，代数运算表。

例 1：A = {所有整数}，B = {所有不等于零的整数}。D = {所有有理数}

0：$(a,b) \mapsto \frac{a}{b} = a \circ b$ 是一个 A×B 到 D 的代数运算，即普通的除法.

例 2：令 V 是数域 F 上一个向量空间，那么 F 的数与 V 的向量空间的乘法是一个 F×V 到 V 的代数运算.

例 3：A = {1}，B = {2}，D = {奇，偶}

0：（1, 2）→奇 = 1∘2 是一个 A×B 到 D 的代数运算.

例 4：A = {1, 2}，B = {1, 2}，D = {奇，偶}

0：（1, 1）→奇 （2, 2）→奇 （1, 2）→奇 （2, 1）→偶

是一个 A×B 到 D 的代数运算.

提问+讨论（3 分钟）

1、$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$到$D$的映射$f: A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m \to D$ 是不是代数运算？

§4 结合律

讲授（10 分钟）

运算满足结合律的定义和下面基本定理的证明。

定理：如果A的代数运算∘满足结合律，那么对于A的任意$n(n \geq 2)$个元

素$a_1,a_2,\cdots,a_n$来说，所有加括号的步骤运算的结果总是唯一的，因此，这一唯一的结果就可用$a_1\circ a_2\circ\cdots\circ a_n$来表示。

提问+讨论（3 分钟）

1、结合律成立的条件是什么？

例题（3 分钟）

例：A = {所有整数}，代数运算是普通减法，那么$(a-b)-\mathrm{c}\neq a-(b-\mathrm{c})$，除非$c=0$.

§5 交换律

讲授（10 分钟）

运算满足交换律的定义和下面基本定理的证明。

定理：设A的代数运算$\circ$同时满足结合律和交换律，那么$a_1\circ a_2\circ\cdots\circ a_n$中的元的次序可以任意调换。

提问+讨论（3 分钟）

举一个不满足交换律的运算。

§6 分配律

讲授（8 分钟）

两种运算满足第一分配律和第二分配律的定义和下面两个基本定理的证明。

定理 1：设A,B和$\otimes,\oplus$如上，如果$\oplus$满足结合律，且$\otimes,\oplus$满足第一分配律，那么$\forall b\in B,\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$，都有

$$b\otimes(a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n)=(b\otimes a_1)\oplus(b\otimes a_2)\oplus\cdots\oplus(b\otimes a_n)$$

定理 2：设A,B和$\otimes,\oplus$同上，若$\oplus$适合结合律，而$\otimes,\oplus$适合第二分配律。那么$\forall b\in B,\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in A,$ 都有$(a_1\oplus\cdots\oplus a_n)\otimes b=(a_1\otimes b)\oplus\cdots\oplus(a_n\otimes b)$。

提问+讨论（5 分钟）

1、举出以前接触过的运算中，哪些满足结合律，哪些满足交换律，哪些满足分配律？

2、数学归纳法的种类，何时使用何种数学归纳法？

作业安排及课后反思

P4 第 1 题，P6 第 1、2 题，P9 第 1、2 题，P12 第 1、2、3 题，P14 第 1、2 题. （注：第一章课程结束后作业一起交）

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第一章第 1.1 节

[2] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 引论第一节

第二讲 变换、同态、同构

（教材第一章§7—§8）

教学日期：2015. 9.9

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：理解满射，单射，一一映射及逆映射的定义；掌握同态映射、同态满射的定义及应用。

难点：如何证明映射同态，同态映射在比较两个集合时的结果。

教学内容

§7 一一映射、变换

讲授（20 分钟）

单射（1-1 映射），满射（映上的），一一映射（1-1 对应），变换，单射变换，满射变换，一一变换的概念。

定理：一个A到$\overline{A}$的一一映射φ带来一个通常用φ^{-1}表示的$\overline{A}$到A间的一一映射。

结论：设$\varphi: A\to \overline{A}$是映射，那么：

（1）φ是双射$\Leftrightarrow$ φ可唯一的确定一个逆映射$\varphi^{-1}:\overline{A}\to A$，使得：

（i）φ^{-1}是双射；

（ii）$\phi\phi^{-1}=1_{\overline{A}}$，$\phi^{-1}\phi=1_{A}$；

（iii）φ也是φ^{-1}的逆映射，且$(\varphi^{-1})^{-1}=\varphi$；

（2）φ是双射$\Rightarrow$ A与$\overline{A}$同时是有限集或同时是无限集。

例 1 $\varphi: Z=\{1,2,3,\cdots\} \to 2Z=\{2,4,6,\cdots\}$，其中$\varphi(n)=2n, \forall n \in Z$，可知$\varphi$显然是一个双射。

提问+讨论（3 分钟）

1、从例 1 中得知：一个无限集与其的某个真子集一样“大”。这是否可作为无限集都有的特性？即我们是否有如下的结论：A为无限集的充要条件是A与其某个真子集之间存在双射。

例题（8 分钟）

例 2　A = {所有实数}。　τ：$X \to e^x$是 A 的一个单射变换.

例 3　A = {所有整数}。　τ：$a \to \frac{a}{2}$，假如a是偶数

$a \to \frac{a+1}{2}$，假如a是奇数

是 A 的一个满射变换。

例 4　A = {1，2，3}，τ1：1→1，2→2，3→3，τ2：1→2，2→3，3→1 都是 A 的一一变换。

§8 同态

讲授概念（20 分钟）

同态映射、同态满射、集合 A 与$\overline{A}$同态的概念。

注：抓住关键式子$\varphi(a \circ b)=\varphi(a) \bar{\circ} \varphi(b)$）。即，在$\varphi$之下，只要$a \to \bar{a}, b \to \bar{b}$就有　$a \circ b \to \overline{\bar{a} \bar{\circ} \bar{b}}$。

例 1　Φ：$a \to 1$　(a是A的任一元)是一个A到$\overline{A}$的同态映射，Φ_1是一个A到$\overline{A}$的映射，显然对于的任意两个整数a和b来说，有$a \to 1$，$b \to 1$，$a+b \to 1 = 1 \times 1$.

例 2 ϕ_2 ：$a \to 1$ 若a是偶数；

$a \to -1$ 若a是奇数。

则ϕ_2是一个A到$\overline{A}$的满射的同态映射。

例 3 ϕ_3 ：$a \to -1$ (a是A的任一元) 固然是一个A到$\overline{A}$的映射，但不是同态映射。

提问+讨论（3 分钟）

集合A与$\overline{A}$之间存在同态映射，是否A与$\overline{A}$同态？反之，集合A与$\overline{A}$同态，是否A与$\overline{A}$之间存在同态映射？

讲授本节两个定理（10 分钟）

定理 1 假设对于代数运算$\circ$和$\bar{\circ}$来说，A与$\overline{A}$同态，那么

Ⅰ）若$\circ$适合结合律，$\bar{\circ}$也适合结合律

Ⅱ）若$\circ$适合交换律，$\bar{\circ}$也适合交换律。

定理 2 假定，$\otimes$，$\oplus$都是集合A的代数运算，$\overline{\otimes}$，$\overline{\oplus}$都是集合$\overline{A}$的代数运算，并且存在一个A到$\overline{A}$的满射ϕ，使得A与$\overline{A}$对于代数运算$\otimes$，$\overline{\otimes}$来说同态。对于代数运算$\oplus$，$\overline{\oplus}$来说也是同态，那么

Ⅰ）若$\otimes$，$\oplus$ 适合第一分配律，$\overline{\otimes}$，$\overline{\oplus}$也适合第一分配律

Ⅱ）若$\otimes$，$\oplus$ 适合第一交换律，$\overline{\otimes}$，$\overline{\oplus}$也适合第一交换律

§9 同构、自同构

讲授（15 分钟）

同构映射、集合A与$\overline{A}$同构、自同构。

（注：同构 ＝ 同态 ＋ 单射）

例 1：$A=\{1,2,3\}$． $\overline{A}=\{4,5,6\}$．

	1	2	3
1	3	3	3
2	3	3	3
3	3	3	3

（1）

	4	5	6
4	6	6	6
5	6	6	6
6	6	6	6

（2）

（1）、（2）分别是 A 与 $\overline{A}$ 的代数运算$\circ$与$\bar{\circ}$的表，那么φ：1→4，2→5，3→6，是一个 A 与 $\overline{A}$ 之间的一个同构映射。

例 2：$A=\{1,2,3\}$ 代数运算“$\circ$”由下表给定：

	1	2	3
1	3	3	3
2	3	3	3
3	3	3	3

那么 ϕ：1→2，2→1，3→3 是一个对于“$\circ$”来说的 A 的自同构。

提问+讨论（5 分钟）

1、两个代数体系如果同构，那么它们之间的同构映射是唯一的吗？若是，请证明，若不是，请举例说明。

作业安排及课后反思

P19 第 2、3 题，P23 第 1、2 题，P26 第 1、2 题（注：第一章课程结

束后作业一起交）

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第一章第 1.1 节

[2] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 引论第一节

第三讲　等价关系与集合的分类

（教材第一章§10）

教学日期：2015. 9.15

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：掌握关系和等价关系的定义，集合的分类，全体代表团，理解模 n 的剩余类。

难点：同余关系，模 n 的剩余类。

教学内容

§10 等价关系与集合的分类

讲授（35 分钟）

二元关系（关系）、等价关系（等价）、集合的分类、代表、全体代表团的定义；集合的分类与等价关系；

例 1：A ={所有实数}

R: (a,b) →对，若是$b-a$是正的

(a,b)→错，若是$b-a$不是正的

是A 的元间的一个关系。

定理 1：集合A的每个分类都决定了A的元间的一个等价关系。

定理 2：集合A的一个等价关系～决定A的一个分类。

注意：

（1）$a \sim b \Leftrightarrow [a]=[b]$

（2）若$[a]\cap[b]\neq\varnothing\Rightarrow[a]=[b]$

（3） 由于$\forall b\in[a]$，那么$b\sim a$，这表明对等价类$[a]$来说，$[a]$中任何元素b均可作为$[a]$的代表，即等价类与其代表元素的选取无关。

提问+讨论（10 分钟）

1、$A=\{$所有实数$\}$，A的元间的关系“$>$”以及“$\geq$”是不是等价关系?

2、集合A由一个等价关系得到的一个分类，这个分类的全体代表团如何确定？是否唯一？

讲授（20 分钟）

同余关系、模n的同余关系、模n的剩余类（由同余关系确定的分类中的等价关系为模n的剩余类）。由同余关系引导出来的商集Z/R习惯上记为Z_n.

模n的剩余类：

$$[0]=\{\cdots,-2n,-n,0,n,2n,\cdots\}$$
$$[1]=\{\cdots,-2n+1,-n+1,1,n+1,2n+1,\cdots\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[n-1]=\{\cdots-n-1,-1,n-1,2n-1,\cdots\}$$

提问+讨论（8 分钟）

3、有人说：假如一个关系R适合对称和推移律,那么它也适合反射律.他的推论方法是：

因为R适合对称，从而$aRb\Rightarrow bRa$；

因为R适合推移律，从而$aRb,bRa\Rightarrow aRa$

这个推论方法有什么错误?

复习第一章内容（15 分钟）

作业安排及课后反思

P30 第 3 题（下次课将收交第一章的作业，由组长负责）

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第一章第 1.1 节

[2] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 引论第一节

第二章 群论

第一讲 群的定义、单位元、逆元

（教材第二章§1—§2）

教学日期：2015. 9.16

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：理解群的第一定义和第二定义，掌握群的判定方法。掌握两个定义的联系和区别，两个定义等价的证明。单位元、逆元的定义。

难点：利用群的定义证明性质和判定；判定一个代数系统时一个群的常用方法，尤其是第一定义的第三个条件。单位元、逆元的求法。

教学内容

§1 群的定义

讲授两个定义及其等价性（45 分钟）

群的第一定义：一个非空集合G对一个叫做乘法的代数过算来说作成一个群，假如:

Ⅰ. G对于这个乘法来说是闭的；

Ⅱ. 结合律成立：$a(bc)=(ab)c$对G的任意三个元都对；

Ⅲ. 对于G的任意两个元a,b来说，方程$ax=b$和$ya=b$在G中都有解，是一个有限整数。

例 1：证明若G包含一个元 g，且乘法是 gg = g，则G对于这个乘法来

说作成一个群。

例 2：设G是一个全体整数的集合，证明G对于普通加法来说作成一个群。

例 3：设G是所有不等于零的整数集合，证明G对于普通乘法来说不作成一个群。

群G有以下性质：

Ⅳ．G里至少有一个元e，叫做G的一个左单位元，使得$ea=a$对于G的任何元a都成立。

Ⅴ．对于G的每一个元a，在G里至少存在一个元a^{-1}，叫做a的一个左逆元，能让$a^{-1}a=e$成立。这里e是一个固定的左单位元。

证明：略。

群的第二定义：一个非空集合G对一个叫做乘法的代数过算来说作成一个群，如果

Ⅰ．G对于这个乘法来说是闭的；

Ⅱ．结合律成立：$a(bc)=(ab)c$对G的任意三个元都对

Ⅳ．G里至少有一个元e，叫做G的一个左单位元，能让

$$ea=a$$

对于G的任何元a都成立；

Ⅴ．对于G的每一个元a，在G里至少存在一个左逆元，能让$a^{-1}a=e$。

证明思路：1. 一个左逆元也一定是一个右逆元；

2．一个左单位元也一定是一个右单位元；

3．最终结论。

提问+讨论（10 分钟）

1、全体整数的集合对于普通减法来说是不是一个群?

2、举一个有两个元的群的例子. （如： $G=\{1,-1\}$ 对于普通乘法）

讲授群的阶，交换群（10 分钟）

注：(1) 一个群的元素个数可以有限也可以无限；

(2) 在一个群里，结合律是对的；

(3) 在一个群里，交换律未必成立。

定义：一个群叫做有限群，假如这个群的元的个数是一个有限整数。否则这个群叫做无限群。一个有限群元的个数叫做这个群的阶。

定义：一个群叫做交换群，假如

$$ab=ba$$

对于G的任何两个元a,b都成立。

§2 单位元、逆元、消去律

讲授（15 分钟）

定理 1：在一个群G里存在一个并且只存在一个元e，能使

$$ea=ae=a$$

对于G的任意元a都对。

提示：只须用反证法证唯一性。

定义：一个群G的唯一的能使

$$ea=ae=a \quad （a \text{是} G \text{的任一元}）$$

的元e叫做群G的单位元。

定理 2：对于群G的每一个元a来说，在G里存在一个而且只存在一个元a^{-1}，能使

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e$$

提示：只须用反证法证唯一性。

定义：唯一的能使

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e$$

的元a^{-1}叫做元a的逆元（有时简称逆）

例 1：全体不等于 0 的有理数对于普通乘法来说作成一个群，则这个群的单位元是零，元a的逆元是$-a$。

例 2．全体整数对于普通加法来说作成一个群。这个群的单位元是零，a的逆元是$-a$

思考题（5 分钟）

对比群的单位元、逆元和线性空间的单位元、逆元。

作业安排及课后反思

P35 第 3 题，P38 第 2、4 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤，章璞．近世代数引论．合肥：中国科学技术大学出版社，

2009. 第一章第 1.2 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第一章第 1.1 节

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京:高等教育出版社, 2007. 引论第 2 节、第一章第 1 节

第二讲 元的阶、消去律、有限群的另一定义

（教材第二章§2—§3）

教学日期：**2015. 9.22**

教学方法：**讲授+提问+讨论；板书+PPT**

教学重点：元的阶、消去律、有限群的另一定义。

难点：元的阶和群的阶的区别。群的第三个定义的适用范围（有限群）。

教学内容

§2 单位元、逆元、消去律

讲授（30 分钟）

定义：群 G 的一个元 a，能够使得

$$a^m = e$$

的最小的正整数 m 叫做 a 的阶。若是这样一个 m 不存在，我们说，a 是无限阶的。

例 3：G 刚好包含 $x^3=1$ 的三个根：

$$1,\quad \varepsilon_1=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \varepsilon_2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

对于普通乘法来说成一个群。

Ⅰ，Ⅱ显然；

Ⅳ. 1 是 G 的单位元；

Ⅴ. 1 的逆元是 1，ε_1 的逆元是 ε_2，ε_2 的逆元是 ε_1。

在这个群里，1 的阶是 1，ε_1 的阶是 3，ε_2 的阶是 3

定理 3：一个群的乘法适合

III' 消去律：若 $ax=ax'$， 那么 $x=x'$；若 $ya=y'a$，那么 $y=y'$

证明：略。

推论：在一个群里，方程 $ax=b$ 和 $ya=b$ 各有唯一的解。

提问+讨论（10 分钟）

若群 G 的每一个元都适合方程 $x^2=e$，那么 G 就是交换群，对不对？为什么？

§3 有限群的另一定义

讲授（30 分钟）

若 G 是群，则 G 必满足（1）封闭性（2）结合律（3）消去律。但如果代数体系 $\{G,\circ\}$ 能满足（1）（2）和（3），是否可断定 G 就是群呢？先看下面的例子：

例：G ＝{所有不等于零的整数}

对于普通乘法来说这个 G 适合 I，II，III'，可是不适合 III。

如果是有限集，那情形就不一样了。

定理：一个有乘法的有限集合 G，若是适合 I，II 和 III'，那么它也适合 III。

证明：此略

有限群的另一定义：一个有乘法的有限不空集合 G 作成一个群，假如 I，III，III'能被满足。

提问+讨论（10 分钟）

有限群是否一定满足消去律？

作业安排及课后反思

P35 第 3 题，P38 第 2、4 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第一章第 1.2 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第一章第 1.1 节

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 引论第 2 节、第一章第 1 节

第三讲 群的同态、变换群

（教材第二章§4—§5）

教学日期：2015. 9.23，2015. 9.29

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：指出群同态与两个集合同态是一样的，只是集合特殊到成为了群而已。“满同态映射”的重要性质是具有“传递”作用，那么在群的满同态映射里，它能传递一些什么呢？（定理 1, 2）

难点：1、两个群之间具有的同态映射和群同态的差别；

2、§5 中映射的表示形式上有所改变：$\tau: x \mapsto \overline{x} = \tau(x)$ 改成：$\tau: x \mapsto \overline{x} = x^{\tau}$。也就是说，过去我们的记法“$\tau(x)$”将变为“$x^{\tau}$”，因此要当心：$(\tau\lambda)(x) = \tau(\lambda(x)) \to x^{\lambda\tau} = (x^{\lambda})^{\tau}$，而不是 $(\tau\lambda)(x) = \tau(\lambda(x)) \to x^{\lambda\tau} = (x^{\tau})^{\lambda}$。用教材的话是说：当 $\tau: A \to B$ 是映射时，用“$\tau(a)$”． 当 $\tau: A \to A$ 是变换时，使用“a^{τ}”

教学内容

§4 群的同态

讲授（30 分钟）

设 $\{G, \circ\}$ 和 $\{\overline{G}, \bar{\circ}\}$ 都是群，如果存在映射 ϕ: $G \to \overline{G}$ 使 $\forall a, b \in G$ 都有 $\phi(a \circ b) = \phi(a) \bar{\circ} \phi(b)$，则称 ϕ 是群同构态映射；如果 ϕ 是满射，则必 ϕ 为群满同态映射，（注：这是重要的一种同态，要特别关注）简称 G 与 $\overline{G}$ 同态，并记为 $G \sim \overline{G}$，此时也称 $\overline{G}$ 是 G 的同态像。

定理 1：假设G与$\overline{G}$对于它们的乘法来说同态，那么$\overline{G}$也是一个群。

例 1：$\overline{G}=\{$所有奇数$\}$。$\overline{G}$对于普通乘法不是一个群。

例 2：$G=\{e\}$，G对于乘法$ee=e$显然作成群。但

$$\phi:\overline{a}\to e$$

显然是$\overline{G}$到G的一个同态满射。

由定理 1 的证明可以直接得出

定理 2：假定G和$\overline{G}$是两个群，在G到$\overline{G}$的一个同态满射之下，G的单位元 e 的象是$\overline{G}$的单位元，G的元a的逆元a^{-1}的象是a的象的逆元。

提问+讨论（10 分钟）

设 A = {a, b, c}, A 的乘法由下表决定：

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

的集合，G是全体整数对普加法来说作成的一个群，找出它们之间的一个同态映射？且判断 A 是不是一个群。

§5 变换群

讲授（50 分钟）

设$A=\{1,2\}$．现取出A的几个变换

$\tau_1:1\mapsto 2,2\mapsto 1$ （即 $1^{\tau_1}=1,2^{\tau_1}=1$）

$\tau_2 : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2$ （即 $1^{\tau_2} = 2, 2^{\tau_2} = 2$）

$\tau_3 : 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2$ （即 $1^{\tau_3} = 1, 2^{\tau_3} = 2$）

$\tau_4 : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1$ （即 $1^{\tau_3} = 2, 2^{\tau_3} = 1$）

可以看出．$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ 是 A 的全部变换．其中 τ_3 和 τ_4 是双射．并且 τ_3 是恒等变换．习惯上记 $\tau_3 = \varepsilon$（或 $\tau_3 = 1_A$）。

把 A 的全体变换作成一个集合 $\mathrm{S} = \{\tau, \lambda, \mu, \cdots\}$

例 2. 利用例 1．可以换算一下它们的合成（乘积）

$\tau_1\tau_2$：$1 \mapsto 2$；$2 \mapsto 2$．

即 $1^{\tau\,\tau_2} = 1^{\tau_2} = 2; 2^{\tau_1\tau_2} = 1^{\tau_2} = 2.$

这表明 $\tau_1\tau_2 = \tau_2$，同理知 $\tau_2\tau_4 = \tau_4$。利用 τ_3 是恒等变换．则 $\tau_3\tau_i = \tau_i\tau_3 = \tau_i$（$i = 1,2,3,4)$．这是因为

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\tau_3\tau_i} = (1^{\tau_3})^{\tau_i} = 1^{\tau_i} \\ 2^{\tau_3\tau_i} = (2^{\tau_3})^{\tau_i} = 2^{\tau_i} \end{array}\right\} \Rightarrow \tau_3\,\tau_i = \tau_i \quad \text{并且又有} \quad \left.\begin{array}{l} 1^{\tau_i\tau_3} = (1^{\tau_i})^{\tau_3} = 1^{\tau_i} \\ 2^{\tau_i\tau_3} = (2^{\tau_i})^{\tau_3} = 2^{\tau_i} \end{array}\right\} \Rightarrow \tau_i\,\tau_3 = \tau_i\,.$$

结论：对于这个乘法，S 有一个单位元，就是 A 的恒等映射 $\varepsilon : a \to a$

对 A 的任一个变换 τ，都有 $\varepsilon\tau = \tau\varepsilon = \tau$

例 3 τ_1 就没有逆元。因为如果 τ_1 有逆元 τ，那么必有 $\tau_1\tau = \varepsilon$ 且 $\tau\tau_1 = \varepsilon$.但我们会发现：

$$1^{\tau\tau_1} = \left(1^{\tau}\right)^{\tau_1} = 1 \qquad \text{而} \qquad 2^{\tau\tau_1} = \left(2^{\tau}\right)^{\tau_1} = 1$$

这说明 $\tau\tau_1 \neq \varepsilon$，即 S 不能成为群。（同理可知，τ_2 也没有逆元）

上面的 S 之所以不能成为群，主要是 τ_1 和 τ_2 不是双射（从而它们没有逆元）因此，我们有：

定理 1：假定 G 是集合 A 的若干个变换所作成的集合，并且 G 包含恒等变换 ε，若是对于变换的乘法来说作成一个群，则 G 只包含 A 的一一变换。

现在可以给出变换群的定义。

定义 1：一个集合 A 的若干个一一变换的乘法作成的群叫做 A 的一个**变换群**。

定理 2：一个集合 A 的所有的一一变换成一个变换群。

定理 3：任何一个群都同一个变换群同构。

注：要求学生能独立证明定理 1, 2, 3。

提问+讨论（10 分钟）

1、由集合 A 的若干个一一变换组成的集合，对变换乘法来说作成一个群，对不对？为什么？或举例说明。（不对）

补充（5 分钟）

此节内容可以使用以前的映射符号来改写一下，可以加强学生对内容的理解和对新旧符号的对应关系的理解。教师举一些例子，其余作为课后作业。

作业安排及课后反思

P44 习题，P50 第 2、3 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤，章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，

2009. 第一章第 1.2 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第一章第 1.7 节

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第一章第 3 节

第四讲 置换群

（教材 第二章§6）

教学日期：2015. 9.29，2015. 9.30

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：置换，置换群，n 次对称群，k-阶循环置换的定义，利用这些概念的含义证明每一个有限群都一个置换群同构。

难点：置换群中元素是 n 次置换非常具体，因此置换本身和将置换写成不相连的循环置换的乘积是一个难点。如定理 2 的证明。

教学内容

§6 置换群

讲授定义定理（45 分钟）

置换、置换群，n 次对称群、k-循环置换的定义。以及对如下定理的理解和证明。

定理 1：n 次对称群 S_n 的阶是 n!

定理 2: 每一个 n 个元的置换π都可以写成若干个互相没有共同数字的（不相连的）循环置换的乘积。

定理 3：每一个有限群都有与一个置换群同构。

例题讲解（25 分钟）

例 1：计算下列置换的乘积。

(1) $\pi\tau$, (2) π^2, (3) $\pi\tau^2$.

注意：置换乘积中，是从左到右求变换值，这是与过去的习惯方法不同的。

例 2：设 $A=\{1,2,3\}$，那么 A 的全部一一变换构成的三次对称群为

$$S_3=\{\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5\}.$$

其中

$$\pi_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad \pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad \pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad \pi_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\quad \pi_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

所以 $|S_3|=3!=b$.其中 π_0 是恒等变换。即，π_0 是 S_3 的单位元。

由于置换群也是变换群，故必蕴含着变换群的一切特征。

譬如，不可交换性：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

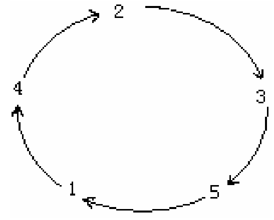
注意：① 循环置换是置换的另一种表达形式，它以发生变化的文字的变化次序为序，表达成轮换的形式。虽然表达形式简捷，但所含置换的原有文字的数目可能反映不出来。这要求事先予以说明。

例如：“8 元置换 $\pi=(1\quad 4\quad 2\quad 3\quad 5)$”。

②.一般地，每个循环的表达方法不唯一，例如：

$$\pi=(1\quad 4\quad 2\quad 3\quad 5)=(2\quad 3\quad 5\quad 1\quad 4)=(5\quad 1\quad 4\quad 2\quad 3)=\cdots$$

这是因为，每个循环置换都可视为一个首尾相接的圆环。



所以，循环中的每个文字都可以置于首位。一旦首位确定后，整个循环置换的表达形式也就确定了。

例 3.（关于 k-阶循环置换）在 S_5 中.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 叫作 3—循环置换.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 叫作 5—循环置换.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1)$ 叫作 1—循环置换

提问+讨论（10 分钟）

S_3 中不能与 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 交换的元有哪些？

作业安排及课后反思

P55 习题 2、3、4 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第一章第 1.6 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第一章第 1.3 节

第五讲 循环群

（教材 第二章§7）

教学日期：2015. 10.13

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：理解循环群的思想，理解循环群结构中的主要的结果（i）数量问题，(ii)构造问题，（iii）循环群的生成元。

难点：理解 G = < a >的定义，利用 G = < a >的定义，证明有关的定理和命题（如：循环群，乘余类加群）。

教学内容

§7 循环群

讲授定义定理例子（60 分钟）

引例：整数加群 $Z=\{n\mid n\in 2\}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$ 中，每个元素都是 1 的倍数（因为此群是加法运算，所以用“倍数”这个词）。事实上，0 是 1 的零倍：$0=0\cdot 1$；正数 m 是 1 的 m 的倍：$m=m\cdot 1$，负数 $-m$ 是 1 的 $-m$ 倍: $-m=(-m)\cdot 1$

循环群、生成元的定义（此略，教材 P57）

例 1：整数加群。

例 2：模 n 剩余类加群 $Z_n=\{[0],[1],[2],\cdots,[n-1]\}$ 中的运算是“钟表加法”，易知 Z_n 中每个元素 $[m]$ 都是 $[1]$ 的倍数。

$$[m]=\underbrace{[1]+[1]+\cdots[1]}_{m}=m\cdot[1]$$

定理：假定G是一个由元a所生成的循环群，那么G的构造完全可以由a的阶来决定。

若a的阶无限，那么G与整数加群同构；

若a的阶是一个有限整数 n，那么G与模 n 乘余类加群同构。

证明：此略。要求学生掌握。

思考题+讨论+讲解（25 分钟）

1、证明一个循环群一定是交换群？

2、假设a生成一个阶n是的循环群G，证明a^r也生成G，假如$(r,n)=1$(这就是说r和n互素)。

作业安排及课后反思

P55 习题 2、4、5 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第一章第 1.4 节

[2] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第一章第 7 节

第六讲 子群

（教材 第二章§8）

教学日期：2015. 10.14

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：理解子群的定义和判定方法，以及构造群子群的方法。

难点：子群的几种判定方法的选取。

教学内容

§8 子群

讲授本节主要内容（60 分钟）

子群的定义和例子，以及判定子群的 3 个主要定理及其证明。

定义（此略）

例 1：设G为任意一个群，那么由G的单位元组成子集$\{e\}$，自然有$\{e\}\le G$，另外G本身也有$G\le G$，所以G一般有两个子群，统称它们为的G平凡子群。如果G除了平凡子群外还有其他子群，那就称为G的真子群，记为$H<G$。

例 2：设$S_3=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$为三次对称群，令$H=\{(1),(12)\}$和三次交错群$A_3=\{(1),(123),(132)\}$。易知$H\le S_3$，$A_3\le S_3$。

定理 1：一个群G的一个不空集H作成G的一个子群的充分且必要条件是

(i) $a,b\in H\Rightarrow ab\in H$

(ii) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$ 。

推论：假定H是群G的一个子群，那么H的单位元就是G的单位元，H的任一元a在H里的逆元就是a在G里的元。

定理 2：一个群G的一个不空子集H作成G的子群的充分必要条件是：

（iii）$a,b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ 。

定理 3：一个群G的一个非空有限子集H作成G的一个子集的充要条件是：$a,b \in H \quad \Rightarrow ab \in H$ 。

思考题+讨论（15 分钟）

1、找出 S_3 的所有子群。

2、群G的两个子群的交集也是G的子群。

讲授子群的一种构造（15 分钟）

利用群G的一个非空子集 S，可以构造G的子群，叫做由 S 生成的子群。

方法：作一个集合，包含 S 的元以及这些元的逆元所作的全部乘积。

作业安排及课后反思

P64-P65 习题 3、4、5、6 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤，章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，

2009. 第一章第 1.3 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第一章第 1.2 节

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第一章第 3 节

第七讲 子群的陪集

（教材 第二章§9）

教学日期：2015. 10.20

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：左、右陪集的定义，群G的子群H的阶，H在G里的指数；任两个左（右）陪集间存在双射的概念。

难点：理解左（右）陪集的思想，理解陪集定义的最基本的两种出发点，利用左（右）陪集的定义掌握左（右）陪集的判别条件。

教学内容

§9 子群的陪集

讲授本节主要内容（70 分钟）

子群的陪集思想：实质上是用子群对群进行分类的问题，关于陪集的定义，有两种最基本的出发点，一种是利用子集的乘积的概念，另一种是等价关系的概念。

记群G和G的一个子群H，规定一个G的元中的关系“～”：

$$a \sim b，当且仅当 ab^{-1} \in H 的时候。$$

则“～”是一个等价关系。

由上面的等价关系“～”所决定的类叫做子群H的右陪集，包含元a的右陪集用符号Ha来表示。

例 1： $G = S_3 = \{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$， $H = \{(1),(12)\}$。

那么 $H(1)=\{(1),(12)\}$　　$H(13)=\{(13),(123)\}$　　$H(23)=\{(23),(132)\}$

假如规定一个G的元中的关系“～’”：

$$a \sim' b，当且仅当 b^{-1}a \in H 的时候$$

同理可证“～’”是一个等价关系。

由等价关系“～’”所决定的类叫做子群H的左陪集，包含元a的左陪集用符号aH来表示。

例 2: 例 1 里H的左陪集是

$$(1)H=\{(1),(12)\} \qquad (13)H=\{(13),(132)\} \qquad (23)H=\{(23),(123)\}$$

注意： 这和H的右陪集并不相同。

定理 1：一个子群H的右、左陪集的个数相等。它们或者都为无限大，或者都有限并且相等。(右陪集（左陪集）的个数叫做H在G里的指数)

下面用陪集来证明几个重要定理。

引理：一个子群H与H的每一个右陪集Ha之间都存在一个映射。

定理 2：设H是一个有限群G的子群，那么H的阶n和它在G里的指数j都能整除G的阶N，并且$N=nj$。

由上等式“$N=nj$”知子群H的阶n是G的N阶的因子，于是可得到下面结论。

定理 3：一个有限群G的任一个元a的阶n都整除G的阶。

思考题+讨论（15 分钟）

设置换群 S3，其子群为H={（1），（12）}，分析H的右（左）陪集。

作业安排及课后反思

P70 习题 1、2、3、5 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第一章第 1.3 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第一章第 1.4 节

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第一章第 8 节

第八讲 不变子群、商群

（教材 第二章§10）

教学日期：2015. 10.21

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：不变子群，不变子群的陪集、不变子群的中心，商群的定义。不变子群的判定。

难点：不变子群的判定、商群。

教学内容

§10 不变子群、商群

讲授本节主要内容（75 分钟）

概念：不变子群，不变子群的陪集、不变子群的中心、集合的乘积、商群。

例 1： 群 G 的平凡子群 G 和 $\{e\}$ 都是不变子群。

例 2：设 G 为群，而 $C(G)=\{x\in G\,|\,\forall a\in G, xa=ax\}$ 叫做 G 的中心。

例 3：如果 G 是一个交换群，那么 G 的任一个子群 H 都是不变子群。

例 4：设 $G=S_3$，那么 $N=\{(1),(123),(132)\}$ 是一个不变子群。

定理 1：一个群 G 的一个子群 N 是一个不变子群的充要条件是：

$$aNa^{-1}=N$$

对于 G 的任意一个元 a 都成立。

定理 2：一个群 G 的一个子群 N 是一个不变子群的充要条件是：

$$a \in G, n \in N \Rightarrow ana^{-1} \in N$$

（注，判断一个子群是不是不变子群，用此定理的条件比较方便）

设$H \lhd G$，规定其陪集的运算法则：

$$(Hx)(Hy) = Hxy$$

欲使$S_R = \{Ha \mid a \in G\}$成为一个群，我们还需对它的代数运算进一步核实——子集之积是否与代表元有关。

设$H \lhd G$，那么$S_R = \{Ha \mid a \in G\}$中定义的运算$(Hx)(Hy) = Hxy$是一个代数运算。这个代数运算与代表元的选择无关。

定理 3：设$H \lhd G$，那么$S_R = \{Ha \mid a \in G\}$关于运算“$HaHb = Hab$”做成一个群。

结论：$\dfrac{G\text{的阶}}{N\text{的阶}} = G/N\text{的阶}$。

思考题+讨论（10 分钟）

列举证明，G的不变子群N的不变子群N_1未必是G的不变子群。

(取$G = S_4$，$N = \{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$，$N_1 = \{(1),(14)(23)\}$)

作业安排及课后反思

P74 习题 1、2、3、4 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第一章第 1.5 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第一章第 1.5 节

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第一章第 8 节

第九讲 同态与不变子群

（教材 第二章§11）

教学日期：2015. 10.27

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：不变子群，商群与同态映射之间的几个关系（定理 1—定理 4 及其证明）。

难点：“群G与$\overline{G}$同态，那么这个同态满射的核N是群G的一个不变子群，并且$G/N \cong \overline{G}$。”的证明。

教学内容

§11 同态与不变子群

讲授本节主要内容（75 分钟）

本节定义了同态满射的核、集合在映射之下的象和完全原象。给出了不变子群，商群与同态映射之间的几个重要的关系，由此看出不变子群，商群的重要意义。

定理 1：一个群G同它的每一个商群G/N同态.

定理 2：设G与$\overline{G}$是两个群，并且G与$\overline{G}$同态，那么这个同态满射的核N是群G的一个不变子群，并且$G/N \cong \overline{G}$。

定理 3：设G与$\overline{G}$是两个群，并且G与$\overline{G}$同态，那么在这个同态满射之下，有

（1）若 $H \le G$，那么 $\phi(H) \le \overline{G}$；

（2）若 $H \lhd G$，那么 $\phi(H) \lhd \overline{G}$.

定理 4：设 G 与 $\overline{G}$ 是两个群，并且 G 与 $\overline{G}$ 同态，那么在这个同态满射之下，有

（1）若 $\overline{H} \le \overline{G} \Rightarrow \phi^{-1}\left(\overline{H}\right) \le G$，并 $\ker(\phi) \le \phi^{-1}\left(\overline{H}\right)$；

（2）若 $\overline{H} \lhd \overline{G} \Rightarrow \phi^{-1}\left(\overline{H}\right) \lhd G$。

（注：此定理的证明与定理 3 类似，可给学生 10 分钟左右，自己对照证明）

思考题+讨论（15 分钟）

1、如何理解群的一个子群可以推测整个群的性质？

2、如何理解群只能和它的商群同态？

作业安排及课后反思

P79 习题 1、2、3、4 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第一章第 1.5 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第一章第 1.7 节

第三章 环与域

第一讲 环的定义、交换律、单位元、逆元

（教材第三章§1—§2）

教学日期：2015. 10.28

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：掌握环的概念及相关性质；理解环这种代数体系中二种运算中的谐调关系。交换环、单位元、逆元的定义和求法。

难点：环的定义中，将它作为一个群而具有的乘法改称加法，重新再定义的代数运算称为乘法（使得它成为环）。加法相应的单位元，逆元改成了零元、负元，乘法对应的才称为单位元，逆元，因此要注意不要混淆。

教学内容

§1 加群、环的定义

讲授环的定义和例子（**35** 分钟）

加群，环的定义

例 1. $\{R;+,\cdot\}$中设Z为整数集,”+”和”•”为Z中通常的整数加法和乘法。易知$\{R;+,\cdot\}$是一个环。习惯上称它为整数环，记为Z。

同理还有有理数环，实数环，复数环。

上述的四个环都是由数组成。故称为数环。

例 2. 偶数集$2Z=\{\cdots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\cdots\}$对于整数通常的加法和乘法也

是一个环。

例 3. 设 $Z[i]=\{a+bi\mid\forall a,b\in Z\}$，按数的通常的加法也构成一个环，叫做高斯数环。

例 4. 任取定一个数域 F，由 F 上一切一付元多项式组成的集合

$$F[x]=\{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\mid a_i\in F,n\in N^{-1}\}$$

关于多项式通常的加法与乘法也可构成一个环。这个环 $\{F[x];+,\bullet\}$ 称为关于 x 的多项式环或一元多项式环。

课堂练习：证明环的性质 1—性质 5（10 分钟）

设 R 是一个环，那么有如下性质。

对 $\forall a,b,c\in R.\quad n,m\in N^*$

性质 1: $c(a-b)=ca-cb$ 且 $(a-b)c=ac-ab$

性质 2: $0a=a0=0$

性质 3: $(-a)b=a(-b)=-ab$

性质 4: $(-a)(-b)=ab$

性质 5: 若 $a_1,a_2,\cdots,a_m\in R$，那么 $\sum_{i=1}^{m}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_m$

讲授环的性质 6—性质 9（10 分钟）

性质 6: $(\sum_{i=1}^{m}a_i)(\sum_{j=1}^{n}b_j)=(a_1+\cdots+a_m)(b_1+\cdots+b_n)$

$$=a_1b_1+a_1b_2+\cdots+a_1b_n+\cdots+a_mb_1$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j,$$

也就是说

$$(\sum_{i=1}^{m} a_i)(\sum_{j=1}^{n} b_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j$$

性质 7: $(na)b = (\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n})b = \underbrace{ab + ab + \cdots ab}_{n} = n(ab)$

$a(nb) = a(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{n}) = \underbrace{ab + ab + \cdots + ab}_{n} = n(ab)$

∴ $(na)b = a(nb) = n(ab) \overset{\triangle}{=} nab$

性质 8: $a^m = \underbrace{aa\cdots a}_{m}$ ， $a^m a^n = a^{m+n}$， $(a^m)^n = a^{mn}$

性质 9: $(-n)a = \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{n}$， $n(a+b) = na + nb$

$(n+m)a = na + ma$， $(nm)a = n(ma)$， $0a = 0$

思考题+讨论（5 分钟）

一个集合关于两种代数运算分别成为一个群，这个集合关于这两种运算是否成为一个环？

§2 交换律、单位元、零因子、整环

讲授（25 分钟）

讲授交换环、环的单位元、逆元的定义，并举例。

特别的，模 n 的剩余类对加法：$[a]+[b]=[a+b]$，乘法：$[a][b]=[ab]$ 作成一个环，称为模 n 的剩余类环。

注意：一个环的元素没有逆元的情况，可能因为环没有单位元，从而逆元无从谈起，可能环有单位元，但某些元素也没有逆元。

例如：① 因为偶数环 $2Z$ 中没有单位元，故 $2Z$ 中没有谈论逆元的“资格”。

② 整数环 Z 中有单位元 1_R (整数 1)。但除了 ± 1 外，其余元都不可逆。

③ 在$M_n(F)$中，单位元是E。而$A\in M_n(F)$可逆$\Leftrightarrow |A|\neq 0$。

注：时间关系，本讲只能安排本节部分内容，本节后面的内容下次课学习。

作业安排及课后反思

P84 习题 1、2 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第二章第 2.1 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第二章第 2.1 节

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第二章第 1 节

第二讲 环的零因子、整环、除环和域

（教材第三章§2—§3）

教学日期：2015.11.3

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：掌握为什么要定义环的零因子，如何求一些常见环的零因子。理解整环、除环、域的概念及相关性质。掌握整环、除环、域的区别和联系，整环的几种判定，域的运算规则和域的判定法则。

难点：零因子与消去律的关系；无零因子环的特征的定义及特性；整环、除环、域的区别和联系。

教学内容

§2 交换律、单位元、零因子、整环（续）

讲授（40分钟）

1、零因子（左零因子、右零因子）的定义

缘由：在§1中已知：“$a=0或b=0 \quad \Rightarrow \quad ab=0$”。

但反之，“$ab=0 \Rightarrow \quad a=0$ 或 $b=0$”这样一条普通的计算规则，在一般的环中未必成立。

譬如，在剩余类环 $Z_6=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$ 中， $[2]\neq[0]$, $[3]\neq[0]$ 但 $[2][3]=[6]=[0]$。

又如，在二阶矩阵关于矩阵加法和矩阵乘法所作成的环 $M_2(F)$ 中，

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\neq 0$，$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\neq 0$，但 $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$。

定义：若是在一个环里$a\neq 0, b\neq 0$，但$ab=0$，那么称a是R的一个左零因子，b是R的一个右零因子。

上例中[2]，A都是左零因子；[3]，B都是右零因子。

在环R中，关于零因子的概念要做如下解释：若a是R的左零因子，一般a未必同时是R的右零因子。

比如，在$\overline{M_2}(F)$中，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$只是右零因子，不是左零因子，其中，

$$\overline{M_2}(F)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b\in F\right\}$$

显然，若环R是变换环时，R的每个左(右)零因子都是零因子。

比如，Z_6中[2]和[3]都是零因子

定理：在一个没有零因子的环里两个消去律都成立：

(1) $a\neq 0, ab=ac\Rightarrow b=c$；

(2) $a\neq 0, ba=ca\Rightarrow b=c$。

反过来，在一个环里如果有一个消去律成立，则这个环没有零因子。

推论：在一个环里如果有一个消去律成立，则另一个消去律也成立。

3、整环的定义

定义：一个R叫作整环，假如

(1)R是交换环；(2)R有单位元；(3)R是无零因子环.

比如：整数环Z是整环。而不是整环的有：偶数环(无1_R；矩阵环$M_n(F)$(不变换且有零因子)，Z_m (m为合数，有零因子)。

思考题+讨论（5 分钟）

一个环的左零因子或右零因子是否唯一？举例说明。

§3 除环、域

讲授（40 分钟）

引例 1、环R只包含一个元a，加法和乘法是：$a+a=a$，$a\,a=a$。R唯一的元有一个逆元，就是它自己。

引例 2、全体有理数作成的集合对于普通加法和乘法来说是环，这个环的任意元$a\neq 0$，有逆元$\frac{1}{a}$。

定义：一个环R叫做一个除环，假如

① R至少包括一个非零元 (R至少含有两个元);

② R有一个单位元;

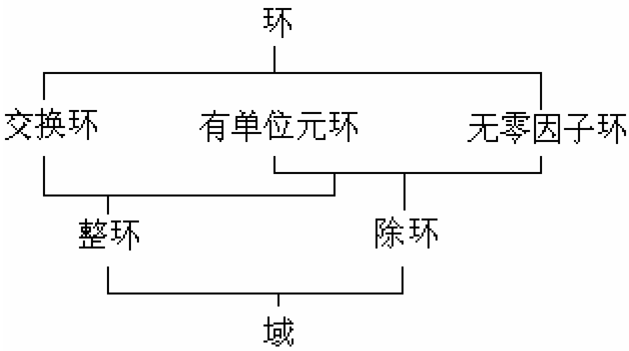
③ $\dot{R}$中每个不等于零的元都有一个逆元。

定义：一个交换除环叫做一个域。

性质 a：除环没有零因子。

性质 b: 对除环R而言，一切非零元构成的集合R^*是一个乘法群。

我们将上述除环称为哈米尔顿（Hamiltom）四元数除环，也简称为四元数除环。



思考题+讨论（5 分钟）

近世代数中所定义的“域”，与高等代数中数域的“域”定义方式不同，

实质是否一样？是什么关系？

作业安排及课后反思

P89 习题 2、3、4 题；P93 习题 3、5 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第二章第 2.1 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第二章第 2.1 节

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第二章第 1 节

第三讲 无零因子环的特征、子环

（教材第三章§4-§5）

教学日期：2015.11.4

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：理解环的特征的定义及性质；掌握子环、子除环、子整环、子域等的定义。环与子环之间的性质“变异”问题。

难点：推出式 $a\neq 0\Rightarrow ma=\overbrace{a+a+\cdots+a}^{m个}\neq 0$ 成立的条件。

教学内容

§4 无零因子环的特征

讲授（**60** 分钟）

本节考查一条计算规则是否成立：

$$a\neq 0\Rightarrow ma=\overbrace{a+a+\cdots+a}^{m个}\neq 0 \qquad (1)$$

例 1、我们看一个模 p （p 是素数)的剩余类环 F 。我们说，F 是一个域。

证明：利用群的第三定义。

在这个域里，我们有 $[a]\neq[0]$，但 $p[a]=0$ 。因此，（1）式不一定成立

例 2．设 $G_1=(b),G_2=(c)$ 是两个循环加群，又设 $|b|=\infty$，而 $|c|=n$，我们有

$$G_1=\{hb|\forall h\in Z\},\quad 且\quad hb=0\Leftrightarrow h=0$$

$$G_2=\{kc|\forall k\in Z\},\quad 且\quad kc=0\Leftrightarrow n|k.$$

现令 $R=G_1\times G_2=\{(hb,kc)\mid \forall h,k\in Z\}$，并规定 R 中加法“+”：

$$(h_1b,k_1c)+(h_2b,k_2c)=(h_1b+h_2b,k_1c+k_2c)$$

乘法“.”:

$$\left(h_1 b, k_1 c\right)\left(h_2 b, k_2 c\right)=\left(0,0\right)$$

可以验证 $\{R,+,\cdot\}$ 是一个环，但在加群 $\{R,+\}$ 中，$\left|(b,0)\right|=\infty$，而 $\left|(0,c)\right|=n$。

定理 1： 在一个没有零因子的环 R 里所有不等于零的元对于加法来说的阶都是一样的。

定义： 一个无零因子的环 R 的非零元的相同的（对加法来说的）阶叫做环 R 的**特征**。

定理 2：如果无零因子环 R 的特征是有限整数 n，那么 n 是一个素数。

推论：整环，除环和域的特征或是无限大，或是一个素数 p。

若环 R 的特征为素数 p，且 R 可交换，则有

$$(a+b)^p = a^p + b^b, \qquad \forall a,b \in R$$

提问+讨论（8 分钟）

当环满足什么条件时（1）式成立？

§5 子环、子环的同态

讲授子环的定义和例子（15 分钟）

一、子环，子除环、子整环、子域的定义（教材 P97）

例 1. 对于环 R 而言，零环 $\{0\}$ 和 R 必是 R 的子环——R 的平凡子环。

例 2. 设 R 为任意环，令 $C(R)=\langle a\in R \mid \forall x\in R, ax=xa\rangle$，则 $C(R)$ 必是一个子环，叫做环 R 的中心。

作业安排及课后反思

P97 习题 1 题；P101 习题 1、2 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第二章第 2.1 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第二章第 2.1 节

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第二章第 2 节

第四讲 子环的同态

（教材第三章§5）

教学日期：2015.11.10

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：理解环同态（环同构）的相关性质。

难点：环同态的保性质问题；环同态定理 4 的证明。

教学内容

§5 子环、子环的同态（续）

讲授（70 分钟）

二、子环的同态、同构

定理 1. 若存在一个 R 到 $\overline{R}$ 的满射，使得 R 与 $\overline{R}$ 对于一对加法和乘法来说都同态，那么 $\overline{R}$ 也必是一个环.

定理 2. 设 $R \overset{\varphi}{\sim} \overline{R}$ 是环同态满射，那么：

1、若 O_R 是 R 中的零元 $\Rightarrow \phi(O_R)$ 必是 $\overline{R}$ 的零元，即

$$\varphi(O_R) = O_{\overline{R}}.$$

2、若 1_R 是 R 的单位元 $\Rightarrow \phi(1_R)$ 必是 $\overline{R}$ 的单位元，即

$$\varphi(1_R) = 1_{\overline{R}}$$

3、一个负元的象必是象的负元，即 $\phi(-a) = -\phi(a)$。

4、若 R 可交换 $\Rightarrow \overline{R}$ 也可交换。

例 3．设 $\varphi: Z \to Z_n$ 是环同态满射，其中：$\phi(n) = [n]$。显然 Z 是整环，则 Z

中没有零因子，但在n不是素数时，Z_n有零因子。

这告诉我们：非零因子的象可能会是零因子。

例 4. 设$R=\langle (a,b) | \forall a,b\in Z\rangle$ 。在R中定义运算：

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2).$$

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(a_1a_2,b_1b_2).$$

可以验证：R是一个环。

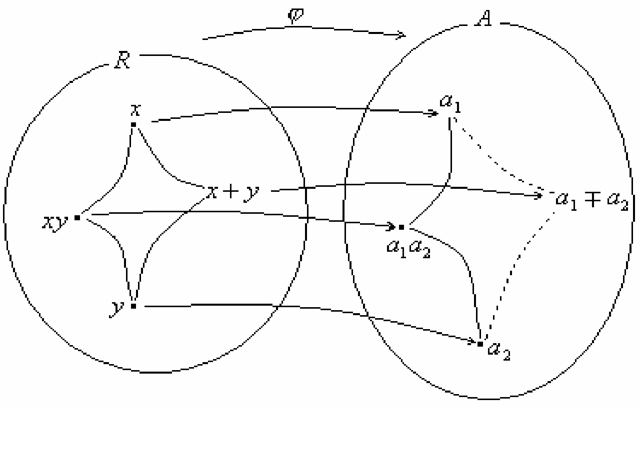
现作一个对应：$\phi:R\to Z$，其中，$\phi(a,b)=a$。可以验证，ϕ是一个环同态满射。由于$(0,0)$是R中的零元，当$a\neq 0$ 且 $b\neq 0$时，有$(a,0)(0,b)=(0,0)\Rightarrow R$中有零因子，而显然$Z$中没有零因子。这表明：零因子的象可能不是零因子。

由上知，环同态满射尚不能保证传递分部的代数性质。然而，如果ϕ是环同构时，其结果则不同了。

定理 3. 假定R和$\overline{R}$都是环，且$R\overset{\phi}{\cong}\overline{R}$，那么$R$是整环(除环、域)当且仅当$\overline{R}$是整环 (除环、域)。

三、子环同态同构的构造

引理：假定在集合A与$\overline{A}$之间存在一个一一映射ϕ，并且A有加法和乘法，那么我们可以替规定加法和乘法，使得A与$\overline{A}$对于一对加法和乘法都同构。



定理 4：设S是环R的一个子环，S在R里的补足集合与另一环$\overline{S}$没有共同元，并且$S\cong\overline{S}$，那么必存在另一个与R同构的环$\overline{R}$，而且$\overline{S}$是$\overline{R}$的子环。

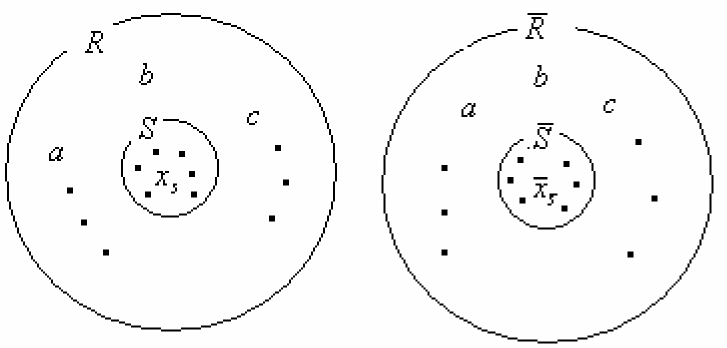
证明：为了方便，令$S=\{a_S,b_S,c_S\cdots\}$，而$\overline{S}=\{\overline{a_{\overline{S}}},\overline{b_{\overline{S}}},\overline{c_{\overline{S}}}\cdots\}$，因 $S\overset{\phi}{\cong}\overline{S}$，则设$\phi(x_S)=\overline{x_{\overline{S}}}$。

令 $B=\{a,b,c\cdots\}\Rightarrow R=\langle a_S,b_S,c_S,\cdots|a,b,c\cdots\rangle$， 又令$\overline{R}=\langle\overline{a_{\overline{S}}},\overline{b_{\overline{S}}},\overline{c_{\overline{S}}}\cdots|a,b,c\cdots\rangle$，显然 $R\neq\overline{R}$。

作映射 $f:R\to\overline{R}$

$x_S\to\overline{x_{\overline{S}}}$

$x\to x$



(也就是说，对于B中的元，f是恒等映射，对于S中元，f是ϕ)

显然，f是满射。另一方面，$\forall x,y\in R$，可分为三种情形逐一考虑 (其中$x\neq y$).

(ⅰ) 若$x,y\in B\Rightarrow f(x)=x\neq y=f(y)$

(ⅱ) 若$x,y\in S\Rightarrow f(x)=\phi(x),f(y)=\phi(y)$

$\because$ ϕ是同构映射，所以当$x\neq y$时必有$\phi(x)\neq\phi(y)$，从而$\phi(x)\neq\phi(y)$

(ⅲ) 若$x\in B$，而$y\in S$时$\Rightarrow f(x)=x$，但$f(y)=\phi(y)$。

因为$B\cap\overline{S}=\varnothing$, 而$x\in B,\phi(y)\in\overline{S}\Rightarrow x\neq\phi(y)$，所以$f(x)\neq f(y)$。

总之，当$x\neq y$时$\Rightarrow f(x)\neq f(y)$，即，$f$是单射。

综合上述$\Rightarrow f:R\to\overline{R}$为双射。由引理，因为$R$为环，则必可为$\overline{R}$定义加法和乘法，使$\overline{R}$为环且$R\overset{f}{\cong}\overline{R}$。

所以定理的前半部分成立.

下证后半部分也成立 (即$\overline{S}$是$\overline{R}$的子环)。

现设$\overline{R}$中的加法和乘法分别记为“$\mp$”和“$\dot{\cdot}$”，又S设与$\overline{S}$中的加法和乘法分别记为“+”和“ •”。以下将证明若局限在$\overline{S}$内，“$\mp$”与“+”，$\dot{\cdot}$与 •是一致的。

$\forall\overline{x_{\overline{S}}},\overline{y_{\overline{S}}}\in\overline{S}$， $\overline{x_{\overline{S}}}+\overline{y_{\overline{S}}}=\overline{Z_{\overline{S}}}\in\overline{S}$， $\therefore S\overset{\phi}{\cong}\overline{S}$，从而有$x_S,y_S$和$Z_S$使$\phi(x_S)=\overline{x_{\overline{S}}}$，$\phi(y_S)=\overline{y_{\overline{S}}}$， $\phi(z_S)=\overline{z_{\overline{S}}}$。

于是， $\overline{x_{\overline{S}}}\mp\overline{y_{\overline{S}}}=\phi(x_S)\mp\phi(y_S)=f(x_S)\mp f(y_S)=f(x_S+y_S)$

$=f(z_S)=\varphi(z_S)=\overline{z_{\overline{S}}}$

$\therefore$ $\overline{x_{\overline{S}}}+\overline{y_{\overline{S}}}=\overline{z_{\overline{S}}}$。这表明在$\overline{S}$中，加法“$\mp$”与“+”是一致的。

同理可证在$\overline{S}$中“$\dot{\cdot}$”与“ •”也是一致的。所以$\overline{S}$是$\overline{R}$的子环成立。

提问+讨论（15 分钟）

J_3表示模 3 的剩余类所作成的集合。找出加群J_3的所有自同构映射，再找出域J_3的所有自同构映射。

作业安排及课后反思

P101 习题 3、4、6 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第二章第 2.2 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第二章第 2.3 节

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第二章第 3 节

第五讲 多项式环

（教材第三章§6）

教学日期：2015.11.11

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：明确未定元一元多项式的定义及性质；区别高等代数中多项式环的多项式新内容

难点：一元多项式环的存在性的证明（定理 1）。

教学内容

§6 多项式环

讲授（80 分钟）

本节内容在张禾瑞《近世代数》教材 P101—P109。本节考查一种具体的特殊的环，它在数学里占了很重要的地位。

本节涉及的概念有：多项式、系数、多项式环、未定元、一元多项式、多项式的次数、无关未定元等。

一、一元多项式环的定义和存在性（45 分钟）

设R_0是一个含有单位元1_{R_0}的可变换环，又设R是R_0的子环且$1_{R_0}\in R$，现考察R_0中含R及任取定元素$\alpha\in R_0$的最小子环：

$$R[\alpha]=\left\{f(a)=\sum a_i\alpha^i \middle| a_i\in R, n\text{是非负整数}\right\},$$

它对多项式加法和乘法确定是一个环，叫做R上的α的多项式环。

显然$R[\alpha]$是R_0的一个子环，但R中每个多项式$f(\alpha)$的表达形式未必唯

一。

譬如，设 $R=Z$，而 $\alpha=\sqrt{2}\in R_0=R$. 那么 $Z\left[\sqrt{2}\right]$ 中的零元

$$0=0+\alpha\left(\sqrt{2}\right)^2=-2+\left(\sqrt{2}\right)^2.$$

所以，0 的表达式不唯一。

换句话说，上述定义的多项式环中会出一种现象：

$f(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_n\alpha^n=0$，但系数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为零。这显然与高等代数中多项式的零多项式的定义相矛盾。于是，我们有必要对 $\alpha\in R_0$ 做如下的讨论。

定义. R_0 的一个元 x 叫做 R 的一个未定元 (超越元)，假如在 R 中找不到不全为零的元素 $a_0,a_1,\cdots,a_n$，使得

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0,\left(\forall n\in N^*\right)\ \ (\text{即}\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=0\Leftrightarrow a_0=a_1=a_2=\cdots=a_n=0\ \ )$$

否则称 α 为 R 上的代数元。习惯上，记 R 上的未定元为 x。

由上，我们已看到未定元的重要性，但对给定的环里未定元是否一定存在？

例： 设 $R_0=\{a+ib|a,b\in Z\},R=Z$，则知 R_0 是可换的幺环，而 R 为 R_0 的子环，但 R 的未定元不存在。

定理 1： 给了一个有单位元的交换环 R，一定有 R 上的未定元 x 存在，因此也就有 R 上的多项式 $R\{x\}$ 存在。

注：此定理的证明较为复杂，可以给学生提出思路，作为课后作业，让学生结合教材上的证明理清来龙去脉。

二、多元多项式的定义和性质（35 分钟）

设 R_0 是可变换的幺环，而 R 是 R_0 的子环且 $1_{R_0}\in R$。

现任取R_0中n个元素$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，我们可以依次做如下工作：

首先作 R 上的α_1的多项式环$R[\alpha_1]$；再作$R[\alpha_1]$上的α_2的多项式环$R[\alpha_1][\alpha_2]$；类似的，依次往后作，最后作$R[\alpha_1][\alpha_2]\cdots[\alpha_{n-1}]$上的$\alpha_n$的多项式环$R[\alpha_1]\cdots[\alpha_n]$ 。

其中，$\forall f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\in R[\alpha_1][\alpha_2]\cdots[\alpha_N]\Rightarrow=\sum a_{i_1i_2\cdots i_n}\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}\cdots\alpha_n^{i_n}$ （$a_{i_1i_2\cdots i_n}\in R$，系数只有有限个$\neq 0$）

定义. 上述描述的每个$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$称为$R$上的$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的多元多项式，而每个$a_{i_1i_2\cdots i_n}$叫作$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的系数。

习惯上，R上的$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的多项式环$R[\alpha_1]\cdots[\alpha_n]$写成$R[a_1\cdots\alpha_n]$。

对于多元多项式环中加法和乘法的运算为：

$$
\begin{aligned}
&(\sum_{i_1\cdots i_n} a_{i_1i_2\cdots i_n}\alpha_1^{i_1}\cdots\alpha_n^{i_n})+\left(\sum_{j_1\cdots j_n} b_{j_1j_2\cdots j_n}\alpha_1^{j_1}\cdots\alpha_n^{j_n}\right)\\
&=\sum_{i_1\cdots i_n}\left(a_{i_1\cdots i_n}+b_{i_1\cdots i_n}\right)\alpha_1^{i_1}\cdots\alpha_n^{i_n}(\sum_{i_1\cdots i_n} a_{i_1i_2\cdots i_n}\alpha_1^{i_1}\cdots\alpha_n^{i_n})(\sum_{j_1\cdots j_n} b_{j_1\cdots j_n}\alpha_1^{j_1}\cdots\alpha_n^{j_n})\\
&=\sum_{k_1\cdots k_n} C_{k_1\cdots k_n}\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_n^{k_n}
\end{aligned}
$$

其中，$C_{k_1\cdots k_n}=\sum_{i_m+j_m=k_m} a_{i_1\cdots i_n}b_{j_1\cdots j_n}$ 。

同样，上述多元多项式环中元素仍存在着表示不唯一的问题。所以与一元多项式环一样，要定义无关未定元。

定义. R_0中n个元$x_1,x_2,\cdots x_n$叫做R上的无关未定元，假如任何一个R上的$x_1,x_2,\cdots x_n$的多项式都不会等于零，除非这个多项式的系数全为零。

定理 2：给了一个有单位元的交换环R同一个正整数n，一定有R上的未定元$x_1,x_2,\cdots x_n$存在，因此也就有R上的多项式$R[x_1,x_2,\cdots x_n]$存在。

定理 3： 假定$R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$和$R[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$都是有单位元的交换环$R$上的多项式环，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是$R$上的无关未定元，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是上的任意元,

那么 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 与 $R[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$ 同态。

思考题+讨论（10 分钟）

证明：假定 R 是一个整环，那么 R 上的一个多项式环 $R[x]$ 也是一个整环。

作业安排及课后反思

P109 习题 2、3、4 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤，章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第二章第 2.5 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第三章第 3.1 节、第三章第 3.2 节

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社，2007. 第二章第 3 节

第六讲 理想

（教材第三章§7）

教学日期：2015.11.17

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：掌握理想和主理想的定义及表示，理想的各种表现形式。

难点：生成理想的结构问题和传递问题。

教学内容

§6 理想

讲授（75 分钟）

理想子环（简称理想）、零理想、单位理想、真理想、主理想、生成的理想等概念的定义。

例 1、整数环的任意非零整数n的所有倍数rn $(\mathrm{r}\in\mathrm{R})$是整数环$Z$的理想。

例 2、无常数项的所有多项式是多项式环$R[x]$的一个理想。

定理 1：一个除环R只有两个理想，就是零理想和单位理想。

一般情况下，环R中一个元素a生成的理想(a)中元素是比较复杂的，但当R具有某些特殊性质时，那么(a)便得到相应的简化。

例如，原来$(a)=\{\sum_{i=1}^{m}x_i a y_i+sa+at+na\mid\cdots\}$

① 当环R可交换时，$(a)=\{ra+na\mid r\in R,n\in Z\}$；

② 当环R中有单位元1_R时，

$$(a)=\{\sum_{i=1}^{m}x_i a y_i + sa1_R + 1_R at + (n1_R)a1_R \mid \cdots\}$$
$$=\{\sum_{j=1}^{m+1}x_j a y_j \mid x_j, y_j \in R\}$$

③ 当R有单位元且R可交换时，$(a)=\{ra \mid r\in R\}$

那么，有限个元素生成的理想的结构是怎样的呢?

比如：设$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subseteq R$，由子集$S$生成的理想记为$\mu$，

$$\mu=(a_1)+(a_2)+\cdots+(a_{11})=\{s_1+s_2+\cdots+s_n \mid s_i\in(a_i), i=1,2,\cdots,n\}.$$

可知$\sum_{i=1}^{n}(a_i)$是R的理想，且每个生成元$a_i\in\sum_{i=1}^{n}(a_i)$但$\mu$是含$a_1,a_2,\cdots,a_n$中最小的理想$\Rightarrow \mu=\sum_{i=1}^{n}(a_i)$。

例 3. 设R为整数环，而$R[x]$自然也是整环。取$2,x\in R$那由 2 与x生成的理想为

$$(2,x)=\{2f(x)+xg(x) \mid \forall f(x),g(x)\in R[x]\}=\{a_n x^n+\cdots+a_1x+a_0 2 \mid a_i\in R\}.$$

证明：$(2,x)$不是理想。

思考题+讨论（10 分钟）

假定R是偶数环，证明：所有整数$4r$是ϑ的一个理想μ，等式$\mu=(4)$对不对?

作业安排及课后反思

P113 习题 2、3、4、5 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第二章第 2.6 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第二章第 2.2 节

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第二章第 4 节

第七讲 剩余类环、同态与理想

（教材第三章§8）

教学日期：**2015.11.18**

教学方法：**讲授+提问+讨论；板书+PPT**

教学重点：理解剩余类环的定义。在同态映射（或同态满射）之下，子环和理想的“传递性质”。

难点：“同态的两个环 R，$\overline{R}$ 在同态满射之下的核是 R 的一个理想，并且 $R/\mu \cong \overline{R}$（定理 2）”与不变子群的结论作比较。

教学内容

§8 剩余类环、同态与理想

讲授（**75** 分钟）

在前一讲中已知，当 I 是环 R 的理想时，仅加法而言知 $I \lhd R$，得到加法商群 $R/I = \{[a] | \in R\}$，其中群 R/I 中运算为

$$[a]+[b]=[a+b] \text{且} [a]=[b] \Leftrightarrow a-b \in I .$$

本节将说明商加群 R/I 中可以合理地引入一个乘法并使 $\{R/I,+,\cdot\}$ 作成一个环。这个乘法定义为

$$[a]\cdot[b]=[ab] \quad (\text{或} (a+I)(b+I)=ab+I)$$

定理 1. 设假定 R 是一个环，μ 是它的一个理想，$\overline{R}$ 是所有模 μ 的剩余类作成的集合。则 $\overline{R}$ 本身也是一个环，并且 R 与 $\overline{R}$ 同态。

证明：略。

定义： $\overline{R}$叫做环R的模μ的剩余类环。记做R/μ。

例： 设$R=Z$为整数环，而使$I=6Z=\{6n\mid\forall n\in Z\}$，那么

$$R/I=Z_6=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$$

就是我们已经熟悉的“模 6 剩余类环”—这是整数的剩余类环。

定理 2. 假定R同$\overline{R}$是两个环，并且R与$\overline{R}$同态，那么这个同态满射的核μ是R的一个理想，并且$R/\mu\cong\overline{R}$。

与群同态类似，我们可以和到一些与第二章中平行的结果。

定理 3. 在环R到环$\overline{R}$的一个是同态满射之下，

(ⅰ) 若S是R的子环$\Rightarrow\phi(S)$是$\overline{R}$的子环；

(ⅱ) 若I是R的理想且φ为满射$\Rightarrow\phi(I)$是R的理想；

(iii) 若S是$\overline{R}$的子环$\Rightarrow\phi^{-1}(\overline{S})$是$R$的子环；

(iv) 若$\overline{S}$是$\overline{R}$的理想$\Rightarrow\phi^{-1}(\overline{S})$是$R$的理想。

注意：从定理 3 的证明中可知，除了(ⅱ)需要ϕ是满环同态外，其余情况都不需要ϕ是满射这个条件。

思考+讨论（8 分钟）

为什么说理想在环里所占的地位和不变子群在群里所占的地位类似？

作业安排及课后反思

P116 习题 2、3 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第二章第 2.3 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第二章第 2.2 节、第二章第 2.3 节

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第二章第 5 节

第八讲 最大理想、商域

（教材第三章§9-§10）

教学日期：2015.11.24

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：掌握极大理想的概念和判断极大理想的方法，理解极大理想而获得域的方法。

难点：由极大理想构造域。

教学内容

§9 最大理想

讲授（35 分钟）

定义. 一个环 R 的一个不等于 R 的理想 μ 叫做一个极大理想，假如除了 R 和 μ 以外，没有能包含 μ 的理想。

例 1. 设素数 $p\in Z$，那么由 p 生成的理想 $I=(p)$ 必是极大理想.

① 因为 $(p)=\{np|\forall n\in Z\}\Rightarrow 1\notin(p)$（ p 不整除 1），所以 $p\neq Z$

② 设 $J\trianglelefteq Z$，且 $I\not\subset J$，那么说明存在 $g\in J$ 但 $g\notin(p)$

换句话说，p 不整除 g，由 p 的性质 $\Rightarrow(p,g)=1\Rightarrow\exists s,t\in Z$ 使得 $sp+tg=1$。

$\because$ $p\in I\not\subset J$，且 $g\in J\Rightarrow 1=sp+tg\in J\Rightarrow J=R=Z$。

引理 1： 假定 $\mu\neq R$ 是环 R 的理想。剩余类环 R/μ 除了零理想同单位理想以外不在有理想，当且只当 μ 是 R 的极大理想。

我们知道，一个域只有零理想和单位理想。但是，一个只有这两个理想的环却不见得是一个域。那么需要什么条件才成立呢？

引理 2. 若有单位元的交换环$R \neq \{0\}$除了零理想同单位理想以外不在有其他理想，那么R一定为域。

定理. 设假定R是一个有单位元的交换环，μ是环R的一个理想。R/μ为域当且仅当μ是R的一个极大理想。

思考+讨论（8 分钟）

举例：一个只有零理想和单位理想的但不是域的环。

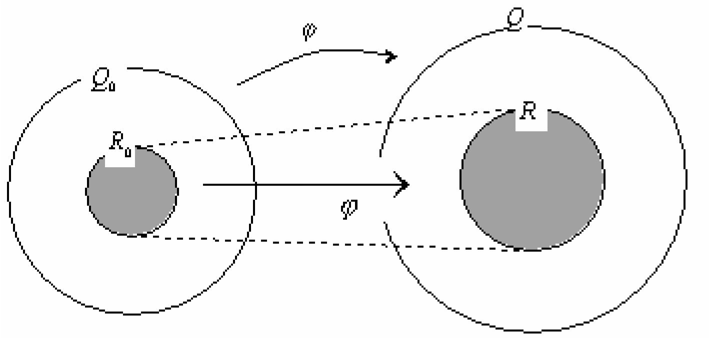
§10 商域

讲授（45 分钟）

定理 1. 每一个没有零因子的交换环R都是一个喻域Q，使R成为Q的子环。

注意：1、证明是加群中的$\forall (0,a),(0,b) \in A$ 则$(0,a) \sim (0,b)$，故$\left[\frac{0}{a}\right] = \left[\frac{0}{b}\right]$。这说明$\{Q_0,+\}$中零元只有一个，但代表元不唯一。

2、证明中是环的时候用到了性质: $(a,c) \sim (ab,cb)$



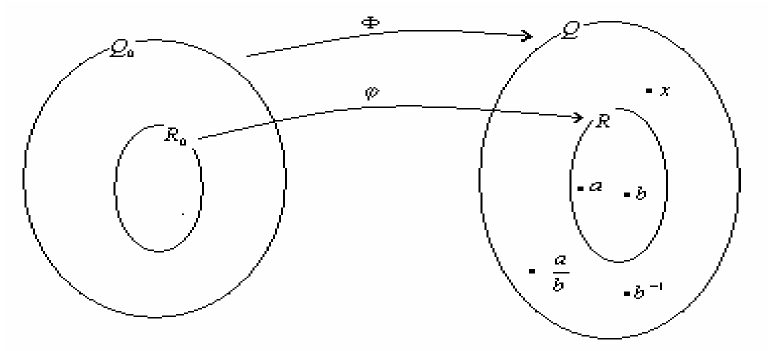
3、事实上，有理数域就是通过定理 1 的证明所述方法，由 Z 而做出的。

由定理的证明过程, 有理数域 Q 中元素的形式为

$$Q=\left\{a,b,c,d,\cdots\left|\left[\frac{a}{b}\right],\left[\frac{c}{d}\right],\left[\frac{e}{f}\right],\cdots\right.\right\}=R\cup\left(Q_0-R_0\right),$$

然而 Q 是如此复杂吗?

定理 2. 包含环 R 的域 Q, 恰好是所有形如 $\dfrac{a}{b}$ $(a,b\in R,b\neq 0)$ 的元组成，即 $Q=\left\{\dfrac{a}{b}\middle|a,0\neq b\in R\right\}$。



定义：设 R 为环而 Q 是包含 R 的一个域，如果 $Q=\left\{\left[\dfrac{a}{b}\right]\middle|a,b\in R,b\neq 0\right\}$，则称 Q 为 R 的商域。

定理 3：假定 R 是一个有两个元的环，F 为包含 R 的域，那么 F 包含 R 的一个商域。

定理 4：同构的环的商域也同构。

思考+课后讨论

根据教材上定理 3 的证明提示，详细证明定理 3。

作业安排及课后反思

P124 习题 1、2 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 第二章第 2.6 节

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第二章第 2.2 节

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007, 第二章第 6 节

第四章 整环里的因子分解

第一讲 素元、唯一分解

（教材第四章§1）

教学日期：2015. 11.25

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：整除、因子、单位（单位元必是单位，反之不然）、相伴元、平凡因子、真因子、素元、唯一分解等概念和他们之间的一些关系。

难点：在具体的整环中求因子、单位、真因子、素元。

教学内容

§1 素元、唯一分解

讲授基本概念（75 分钟）

教材张禾瑞《近世代数》P125—P130：整除、因子、单位（单位元必是单位，反之不然）、相伴元、平凡因子、真因子、素元、唯一分解等概念的定义与内涵。

例 1 在整数环Z中，单位即是1和-1，b是a的相伴元$\Leftrightarrow b=\pm a$。在数域F的多项式环$F[x]$中，单位即是零次多项式$c=F^*$，$g(x)$是$f(x)$的相伴元$\Leftrightarrow g(x)=cf(x)$。

定理 1 两个单位ε_1和ε_2的乘积$\varepsilon_1\varepsilon_2$也是单位。单位$\varepsilon$的逆元$\varepsilon^{-1}$也是一个单位。

推论　整环I中全体单位的集U关于乘法作成群。

例 2　在例 1 的Z中，素元就是素数。在$F[x]$中，素元就是不可约多项式。

定理 2　单位ε同素元p的乘积εp也是一个素元。

定理 3　整环I的一个非零元a有真因子$\Leftrightarrow a=bc$，b和c都不是单位。

推论 假定$a\neq 0$，并且a有真因子$b: a=bc$。那么c也是a的真因子。

例 3 在整环$I=\left\{a+b\sqrt{-3} \mid a,b\in Z\right\}$中：

（1）ε是单位$\Leftrightarrow \left|\varepsilon\right|^2=1 \Leftrightarrow \varepsilon=\pm 1$。

（2）若$\left|\alpha\right|^2=4$，则α是素元。

（3）$4\in I$有两种不同的分解（不相伴分解）：$4=2\cdot 2=\left(1+\sqrt{-3}\right)\left(1-\sqrt{-3}\right)$

思考题+讨论（10 分钟）

证明 0 不是任何元的真因子。

作业安排及课后反思

P130 习题 2、3 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第三章第 3.1 节

第二讲　唯一分解环、主理想环

（**教材**第四章§2）

教学日期：2015. 12.1

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：唯一分解环、公因子、最大公因子、唯一分解环的元互素的定义；唯一分解环的性质（从而得到唯一分解环的第二定义）；唯一分解环中元素的最大公因子的存在性和性质。

难点：唯一分解环的两个定义的等价性；唯一分解环中元素的最大公因子的存在性。

教学内容

§2　唯一分解环

讲授（70 分钟）

一、唯一分解环

定义　一个整环 I 叫做一个唯一分解环，假如 I 的每一个既不等于零又不是单位的元都有唯一分解。

定理 1　一个唯一分解环有以下性质：

(iii) 若素元 $p|ab$，那么 $p|a$ 或 $p|b$。

定理 2　假定一个整环 I 有以下性质：

(i)　I 的每一个既不是零也不是单位的元 a 都有一个分解

$$a = p_1 p_2 \cdots p_r \quad （p_i \text{ 是 } I \text{ 的素元}）$$

(iii) 若I的素元$p|ab$，那么$p|a$或$p|b$，则I是唯一分解环。

由定理 1 和定理 2，我们也可以用条件(i)、(iii)来作为唯一分解环的定义：

假定一个整环I的每一个既不是零也不是单位的元a都有一个分解

$$a = p_1 p_2 \cdots p_r \quad（p_i 是 I 的素元）$$

那么I是唯一分解环$\Leftrightarrow$若I的素元$p|ab$，那么$p|a$或$p|b$。

二、最大公因子、互素

定义 元c叫做元$a_1, a_2, \cdots, a_n$的公因子，假如c同时能整除$a_1, a_2, \cdots, a_n$。

元$a_1, a_2, \cdots, a_n$的一个公因子d叫做$a_1, a_2, \cdots, a_n$的最大公因子，假如d能被$a_1, a_2, \cdots, a_n$的每一个公因子整除。记为$d = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$。

定理 3 一个唯一解环I的两个元a和b在I里一定有最大公因子。a和b的任两个最大公因子必相伴。

若d是元a和b的最大公因子，d'与d相伴，则d'也是a和b的最大公因子。

推论 一个唯一分解环I的n个元$a_1, a_2, \cdots, a_n$在I里一定有最大公因子。$a_1, a_2, \cdots, a_n$的两个最大公因子必相伴。

定义 一个唯一分解环的元$a_1, a_2, \cdots, a_n$是互素的，假如它们的最大公因子是单位。

思考题+讨论（10 分钟）

证明定理 3 之后的推论。

作业安排

P135 习题 2、3 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第三章第 2 节

第三讲　主理想环、欧氏环

（教材第四章§3—§4）

教学日期：2015. 12.2

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：主理想环的概念；主理想环与唯一分解环、最大理想的关系。

难点：主理想环与唯一分解环、最大理想的关系。

教学内容

§3　主理想环

讲授（38分钟）

定义　一个整环 I 叫做一个主理想环，假如 I 的每一个理想都是一个主理想。

注　在整环中，主理想 $(b)\subset(a)\Leftrightarrow b\in(a)\Leftrightarrow a|b$； $(a)=(b)\Leftrightarrow a$ 与 b 相伴。

引理 1　（因子链条件）假定 I 是一个主理想环，若在序列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\ （a_n\in I）$$

里，a_{n+1} 是 a_n 的真因子（$n=1,2,3,\cdots$），那么这个序列一定是一个有限序列。

引理 2　假定 I 是一个主理想环，那么 I 的一个素元 p 生成一个最大理想。

定理　一个主理想环 I 一定是唯一分解环。

思考题+讨论（5分钟）

一个主理想环的非零最大理想都是由一个素元所生成的，对不对？

§4　欧氏环

讲授（35 分钟）

先给出欧氏环的定义，它是一种特殊的主理想环。

例 1　整数环 Z 是一个欧氏环。

例 2　数域 F 上的一元多项式环 $F(x)$ 是一个欧氏环。

定理 1　任何欧氏环 I 一定是一个主理想环，因而一定是一个唯一分解环。

定理 2　整数环是一个主理想环，因而是一个唯一分解环。

引理　假定 $I[x]$ 是整环 I 上的一元多项式环，$I[x]$ 的元

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的最高系数 an 是 I 的一个单位，那么 $I[x]$ 的任意多项式 $f(x)$ 都可以写成

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \quad (q(x), r(x) \in I[x])$$

的形式，这里或是 $r(x) = 0$ 或是 $r(x)$ 的次数小于 $\mathrm{g}(x)$ 的次数 n 。

推论　假定 $F(x)$ 是域 F 上的一元多项式环，$F(x)$ 的元 $\mathrm{g}(x) \neq 0$，那么 $F(x)$ 的任意多项式 $f(x)$ 都可以写成

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \quad (q(x), r(x) \in F[x])$$

的形式，这里或是 $r(x) = 0$ 或是 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ 。

定理 3　一个域 F 上的一元多项式环 $F(x)$ 是一个欧氏环。

例 3　高斯整数环 $Z(i)$ 是一个欧氏环。

注意：一个欧氏环一定是一个主理想环，一个主理想环一定是一个唯一分解环。但是反过来，一个唯一分解环未必是一个主理想环，一个主理

想环也未必是一个欧氏环。

思考题+讨论（8 分钟）

举一个环的例子，它是一个唯一分解环，但不是一个主理想环。

作业安排及课后反思

P138 习题 1、3 题；P141 习题 1、2 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第三章第 3、4 节

第四讲　多项式环的因子分解

（教材第四章§5）

教学日期：2015. 12.8

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：本原多项式及其性质；当多项式的系数所在的环未唯一分解环时，多项式环也是唯一分解环；艾森斯坦判断法。

难点：多项式环也是唯一分解环的充分条件。

教学内容

§5　多项式环的因子分解

讲授（75分钟）

回忆本原多项式的定义（与《高等代数》中一致）

结论：设I是唯一分解环，则

1、I的单位是$I[x]$的仅有的单位。

2、一个本原多项式不会等于零。

3、如果本原多项式$f(x)$可约，那么$f(x)$可写成$f(x)=g(x)h(x)$，这里$g(x)$和$h(x)$的次数都大于零，因而都小于$f(x)$的次数。

4、$I[x]$的非零多项式$f(x)$可以写成$f(x)=af_0(x)$的形式，其中$f_0\left(x\right)$是本原多项式，$a\in I$.

5、$p\in I$是$I[x]$的不可约多项式$\Leftrightarrow$ p是I的素元。$p(x)\notin I$是$I[x]$的不可约多项式$\Leftrightarrow$ $p(x)$是$I[x]$的不可约本原多项式。

引理 1 （高斯引理）假定 $f(x)= g(x)\,h(x)$，那么 $f(x)$ 是原本多项式，当且只有 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是本原多项式。

以下用 Q 表示唯一分解环 I 的商域。

引理 2 $Q[x]$ 的每一个不等于零的多项式 $f(x)$ 都可以写成 $f(x)=\frac{b}{a}f_0(x)$ 的样子，这里 $a,b\in I,\ f_0(x)$ 是 $I[x]$ 的本原多项式。若是 $g_0(x)$ 也有 $f_0(x)$ 的性质，那么

$$g_0(x)=\varepsilon f_0(x)\quad (\varepsilon\text{是}I\text{的单位})$$

引理 3 $I[x]$ 的一个本原多项式 $f_0(x)$ 在 $I[x]$ 里可约 $\Leftrightarrow$ $f_0(x)$ 在 $Q[x]$ 里可约。

引理 4 $I[x]$ 的一个本原多项式 $f_0(x)$ 在 $I[x]$ 里有唯一分解。

二、唯一分解

定理 1 若 I 是唯一分解环，那么 $I[x]$ 也是。

定理 2 若 I 是唯一分解环，那么 $I[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 也是，这里 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 I 上的无关未定元。

艾森斯坦判断法 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in I[x]$，如果存在 I 的素元 p，使

（i） $p\,|\,a_n$； (ii) $p\,|\,a_i,\forall i<n$； (iii) $p^2\,|\,a_0$

那么 $f(x)$ 在 $Q[x]$ 里不可约。

思考题+讨论（8 分钟）

用 I 的商域 Q 来作 Q 上的一元多项式环 $Q[x]$，那么，$Q[x]$ 与 $I[x]$ 的关系时怎样的？

作业安排及课后反思

P147 习题 1、2 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第三章第 3.4 节

[2] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第三章第 5 节

第五讲　因子分解和多项式的根

（教材第四章§6）

教学日期：2015. 12.8

教学方法：讲授+提问+讨论；板书+PPT

教学重点：多项式的根和一次因式的关系；多项式的重根的判别方法。

难点：多项式的重根的判别方法。

教学内容

§6　因子分解和多项式的根

讲授（65 分钟）

在本节中，I 代表整环。

一、根与一次因式的关系

定义　$a\in I$ 叫做 $f(x)\in I[x]$ 的一个根，假如 $f(a)$=0。

定理 1　a 是 $f(x)$ 的一个根 $\Leftrightarrow x-a \mid f(x)$

定理 2　I 的 k 个不同的元 $a_1,a_2,\cdots a_k$ 都是 $f(x)$ 的根

$$\Leftrightarrow (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k) \mid f(x)$$

推论　若 $f(x)$ 的次数是 n，那么 $f(x)$ 在 I 里至多有 n 个根。

二、重根、导数

定理 3 $f(x)$ 的一个根 a 是一个重根 $\Leftrightarrow x-a \mid f'(x)$

推论　假定 $I[x]$ 是唯一分解环，I 的元 a 是 $f(x)$ 的一个重根的充要条件是：$x-a$ 能整除 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的最大公因子。

利用定理 1 及本原多项式性质，可得如下结论：

假定I是唯一分解环。$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\in I[x]$，若$\frac{u}{v}\in Q$是$f(x)$的一个根，这里$u,v$是$I$中互素的元，$Q$是$I$的商域。那么

(i) $v|a_0, u|a_n$；

(ii) $f(x)=\left(x-\frac{u}{v}\right)q(x)$，这里$q(x)\in I[x]$。

思考题+讨论（20 分钟）

证明本节的计算规则。

作业安排及课后反思

P150 习题 1、2 题

课前准备情况及其他相关特殊要求

课前准备了 PPT 电子教案及本课程实施大纲。本课程无其他特殊要求。

参考资料

[1] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009. 第三章第 3.4 节

[2] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007. 第三章第 6 节

课程要求

1、学生自学要求

学生应在上课前对即将学习的章节进行预习，需要学生课堂演讲的内容应倒背如流，保证课堂演讲脱稿进行。已学章节的复习由学生在课余自行安排时间，课堂上不安排复习。根据自身学习情况，除了教材上的内容外，学有余力的同学可以阅读一些相关著作，如下述课外阅读要求中所列著作或其他。

2、课外阅读要求

[1] 刘绍学. 近世代数基础, 北京：高等教育出版社, 1999

[2] B.L.Van der Waerden 著. 丁石孙, 曾肯成, 郝鈵新, 曹锡华译. 代数学, 北京：科学出版社，1964

[3] M. Kline 著. 张理京, 张锦炎, 江泽涵译. 古今数学思想(卷 1-4). 上海：上海科技出版社，2002

3、课堂讨论要求

讨论目的要明确。教师应提出与当堂课程内容有关的、合理而有价值的讨论题目，激发学生思考，避免提出学生知识结构不能达到的问题。

分组合理分工明确。可自由组合，也可按观点的异同进行分组。可先分组讨论再全班讨论。学生应积极参与。

教师应是组织者和指导者。教师应适当控制讨论局面，使得性格内向的学生也有发言机会，但教师不宜发言过多，左右学生的思维。

课堂规范

课堂纪律

课堂纪律是教学活动正常有效进行的一个保证，是教师教好课，学生学好课的前提。

1、教师需在上课前 10-15 分钟到达上课教室，做好课前准备，比如检查有无粉笔黑板刷，开多媒体，检查多媒体能否正常使用。学生需在上课前 5-10 分钟到达上课教室。迟到的学生从教室后门进入教室，不能影响老师和其他学生上课，并在下课后主动向老师说明迟到原因。

2、课堂上教师不能抽烟喝酒，不能吃东西，不能接打电话，手机调为震动或静音。非特别紧急的情况下不能上厕所。

3、课堂上学生不能睡觉，不能抽烟喝酒，不能吃东西，不能交头接耳，不能做与本课程无关的事（如做作业，听音乐），不能接打电话，不能玩手机，手机调为震动或静音。需要上厕所举手示意，教师同意后方可出教室。

4、教师上课使用普通话。学生发言或提问要举手，经老师同意并起立用普通话表达。

5、上课期间，无关人员一律不得进出教室，或在课堂内逗留。

6、下课铃声响起后，老师和学生方可出教室。不得提前下课。

课堂礼仪

礼仪是人类为维系社会正常生活而要求人们共同遵守的最起码的道德规范，它是人们在长期共同生活和相互交往中逐渐形成，并且以风俗、习

惯和传统等方式固定下来。对一个人来说，礼仪是一个人的思想道德水平、文化修养、交际能力的外在表现，对一个社会来说，礼仪是一个国家社会文明程度。道德风尚和生活习惯的反映。

本课程要求教师和学生遵循的礼仪规范主要有：

1、教师和学生均需着装整齐得体，不能穿拖鞋，吊带背心进入教室。

2、爱护教室内的公物、设备（如桌椅，灯具，多媒体设施）。损坏公物、设备要照价赔偿。不能随意搬动教室理的公共设施，不随地吐痰，不乱扔废弃物。

3、教师和学生在上课过程中均应注意语言文明，相互尊重。教师不能辱骂学生，更不能对学生进行体罚。学生不能随意打断顶撞老师，有问题或意见不一致应举手，经教师同意后相互沟通协调。

4、上课期间和课间均不得在教室或过道内打闹、喧哗，影响其他班级的教学或其他同学的正常自习。

5、教师上完课应关闭多媒体和多媒体机柜。如果课程为上午（下午、晚上）最后一节课，最后离开教室的老师或学生应关闭教室的所有灯光。

课程考核

1、出勤（迟到、早退等）、作业、报告等的要求

（1）一学期教师至少随机抽 1/2 的课时点名，对迟到旷课的学生作书面记载。严禁不假不到，病假事假需相应的请假条（所在学院负责老师签字）。旷课一次扣平时成绩 3 分,迟到或早退一次扣平时成绩 2 分.

（2）学生按时保质保量完成作业，由组长收发作业。作业全批全改，用 A+、A、B、C、D 五个等级，分别表示 100 分（全对且书写工整），90-99（全对或极少数错误）、80-89（错 1 道题以上）、70-79（错 2-3 题）和 60-69（错一半以上或未完成）。

2、成绩的构成与评分规则说明

平时成绩 30% （其中考勤 10%，作业 10%，期中考试 10%）+ 考核成绩 70%

3、考试形式及说明

考试形式：闭卷考试

说明：旷课次数达点名次数 1/3、未参加期中考试或作业一次都没有交的同学不能参加期末考核。

学术诚信

本课程的考核过程中，若出现学生考试违规与作弊，抄袭他人论文或其他伪造成果的行为，按四川理工学院相应政策处理。

课程资源

1、教材与参考书

本课程教材为：张禾瑞著，高等教育出版社出版的《近世代数基础》（2013 年第 50 次印刷）

本课程参考书目可选：

[1] 冯克勤, 章璞. 近世代数引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009.

[2] 杨劲根. 近世代数讲义. 北京：科学出版社, 2009.

[3] 石生明. 近世代数初步. 北京：高等教育出版社, 2007.

[4] 赵春来, 徐明. 抽象代数 I. 北京: 北京大学出版社, 2008.

2、专业学术著作

《近世代数》是数学与应用数学专业的一门重要的专业必修课，相对其他数学课程更具有抽象性，也称《抽象代数》。与《近世代数》有关的学术著作和科研论文比较多，除上述参考书目外，还有如下著作等（不能完全列出）。

[1] Garrett Birkhoff, Saunders Mac Lane. A Survey of Modern Algebra. A. K. Peters/CRC Press, 1998.

[2] 菲来，抽象代数基础教程（英文版），长春：机械工业出版社，2008.

[3] Joseph J. Rotman. A First Course in Abstract Algebra with Applications.

Addison Wesley, 2005.

[4] Ali Ghaffari. Γ-amenability of Locally Compact Groups. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2010, 26(12): 2313-2324.

[5] 邱维声. 与极小非超可解群有关的群的不可约表示. 北京大学学报（自然科学版）, 1990, 26(5): 592-601.

3、专业刊物

Acta Mathematica Sinica (English Series)、 Chinese Science Bulletin、 Northeastern Mathematical Journal、Science China (Mathematics)、《数学进展》,《纯粹数学与应用数学》、《数学年刊》、《系统科学与数学》、等刊物，以及一些高校学报均可刊登近世代数方面的文章。

4、网络课程资源

爱课程：http://www.icourses.cn

中国大学 MOOC：http://www.icourse163.org/

网易公开课：http://open.163.com/

近世代数，北师大视频教程

http://video.1kejian.com/university/ggkc/12405/

5、课外阅读资源

[1] 柯斯特利金. 代数学引论, 北京：高等教育出版社, 2006.

[2] 王元，严士健，石钟慈，谈德颜编译. 数学百科全书（5 卷本）. 北京：科学出版社，1994－2000.

[3] 张奠宙. 20 世纪数学经纬. 上海：华东师范大学出版社，2002.

教学合约

本人已阅读《近世代数》课程实施大纲，理解了其中内容。本人同意遵守课程实施大纲中阐述的标准和期望，并将本课程的重点、难点、课程要求、课堂纪律，课堂礼仪、考核形式及要求传达给学生。

其他说明

《近世代数》内容比较抽象，它的任务是使学生掌握近代抽象分析的基本思想，为进一步钻研现代数学理论打下初步基础。也是基础数学考研究生入学考试的科目之一。学习《近世代数》，需要注意以下方面：

1．坚定决心，迎难而上。

2. 做好预习和复习环节；勤于思考，独立完成作业。

3．正确掌握近世代数的学习方法，不懂则问，多与任课教师和高年级同学沟通讨论。

4．抓住定义定理，深刻理解定义的内涵，外延，弄清定理的条件结论，适用范围。