**四川理工学院课程实施大纲**

|  |
| --- |
| **课程名称：高等数学B** |
| **授课班级：给排2015级1、2班**  **给排2015级3班、工业2015级1班** |
| **任课教师： 李放** |
| **工作部门：理学院** |
| **联系方式：** |

**四川理工学院 制**

**2016年 2 月**

**《高等数学B》课程实施大纲**

**基本信息**

|  |
| --- |
| 课程代码：0713100b  课程名称：高等数学B  学 分：4  总 学 时：64  学 期：2015-2016-2  上课时间：1-16周  上课地点：黄岭校区  答疑时间和方式：面对面、电话，QQ群  答疑地点：D1-231、D3-305、D3-406等  授课班级： 给排2015级1、2班，给排2015级3班、工业2015级1班  任课教师： 李放  学 院：理学院  邮 箱：lifang1687@126.com  联系电话：13708151687 |

**目 录**

[1．教学理念 8](#_Toc448127491)

[2．课程介绍 8](#_Toc448127492)

[2.1课程的性质 8](#_Toc448127493)

[2.2课程在学科专业结构中的地位、作用 8](#_Toc448127494)

[2.3课程的前沿及发展趋势 9](#_Toc448127495)

[2.4学习本课程的必要性 9](#_Toc448127496)

[3．教师简介 9](#_Toc448127497)

[4．先修课程 9](#_Toc448127498)

[5．课程目标 9](#_Toc448127499)

[5.1知识与技能方面 9](#_Toc448127500)

[5.2过程与方法方面 10](#_Toc448127501)

[5.3情感、态度与价值观方面 10](#_Toc448127502)

[6．课程内容 10](#_Toc448127503)

[6.1课程的内容概要 10](#_Toc448127504)

[6.2教学重点、难点 11](#_Toc448127505)

[6.3学时安排 11](#_Toc448127506)

[7．《高等数学》理论课程实施过程 13](#_Toc448127507)

[7.1教学单元一 13](#_Toc448127508)

[7.1.1教学目标 13](#_Toc448127509)

[7.1.2教学内容（含重点、难点） 13](#_Toc448127510)

[7.1.3教学过程 13](#_Toc448127511)

[7.1.4作业安排及课后反思 16](#_Toc448127512)

[7.1.5参考资料 16](#_Toc448127513)

[7.2教学单元二 16](#_Toc448127514)

[7.2.1教学目标 17](#_Toc448127515)

[7.2.2教学内容（含重点、难点） 17](#_Toc448127516)

[7.2.3教学过程 17](#_Toc448127517)

[7.2.4作业安排及课后反思 22](#_Toc448127518)

[7.2.5参考资料 22](#_Toc448127519)

[7.3教学单元三 23](#_Toc448127520)

[7.3.1教学目标 23](#_Toc448127521)

[7.3.2教学内容（含重点、难点） 23](#_Toc448127522)

[7.3.3教学过程 23](#_Toc448127523)

[7.3.4作业安排及课后反思 29](#_Toc448127524)

[7.3.5参考资料 29](#_Toc448127525)

[7.4教学单元四 29](#_Toc448127526)

[7.4.1教学目标 29](#_Toc448127527)

[7.4.2教学内容（含重点、难点） 29](#_Toc448127528)

[7.4.3教学过程 30](#_Toc448127529)

[7.4.4作业安排及课后反思 36](#_Toc448127530)

[7.4.5参考资料 36](#_Toc448127531)

[7.5教学单元五 36](#_Toc448127532)

[7.5.1教学目标 37](#_Toc448127533)

[7.5.2教学内容（含重点、难点） 37](#_Toc448127534)

[7.5.3教学过程 37](#_Toc448127535)

[7.5.4作业安排及课后反思 42](#_Toc448127536)

[7.5.5参考资料 42](#_Toc448127537)

[7.6教学单元六 42](#_Toc448127538)

[7.6.1教学目标 42](#_Toc448127539)

[7.6.2教学内容（含重点、难点） 42](#_Toc448127540)

[7.6.3教学过程 43](#_Toc448127541)

[7.6.4作业安排及课后反思 47](#_Toc448127542)

[7.54.5参考资料 47](#_Toc448127543)

[7.7教学单元七 48](#_Toc448127544)

[7.7.1教学目标 48](#_Toc448127545)

[7.7.2教学内容（含重点、难点） 48](#_Toc448127546)

[7.7.3教学过程 48](#_Toc448127547)

[7.7.4作业安排及课后反思 51](#_Toc448127548)

[7.55.5参考资料 51](#_Toc448127549)

[7.8教学单元八 51](#_Toc448127550)

[7.8.1教学目标 51](#_Toc448127551)

[7.8.2教学内容（含重点、难点） 52](#_Toc448127552)

[7.8.3教学过程 52](#_Toc448127553)

[7.8.4作业安排及课后反思 58](#_Toc448127554)

[7.8.5参考资料 58](#_Toc448127555)

[7.9教学单元九 59](#_Toc448127556)

[7.9.1教学目标 59](#_Toc448127557)

[7.9.2教学内容 59](#_Toc448127558)

[7.9.3教学过程 59](#_Toc448127559)

[7.9.4作业安排及课后反思 60](#_Toc448127560)

[7.9.5参考资料 60](#_Toc448127561)

[7.10教学单元十 60](#_Toc448127562)

[7.10.1教学目标 60](#_Toc448127563)

[7.10.2教学内容（含重点、难点） 60](#_Toc448127564)

[7.10.3教学过程 61](#_Toc448127565)

[7.10.4作业安排及课后反思 65](#_Toc448127566)

[7.10.5参考资料 65](#_Toc448127567)

[7.11教学单元十一 65](#_Toc448127568)

[7.11.1教学目标 65](#_Toc448127569)

[7.11.2教学内容（含重点、难点） 65](#_Toc448127570)

[7.11.3教学过程 66](#_Toc448127571)

[7.11.4作业安排及课后反思 70](#_Toc448127572)

[7.11.5参考资料 70](#_Toc448127573)

[7.12教学单元十二 70](#_Toc448127574)

[7.12.1教学目标 70](#_Toc448127575)

[7.12.2教学内容（含重点、难点） 71](#_Toc448127576)

[7.12.3教学过程 71](#_Toc448127577)

[7.12.4作业安排及课后反思 74](#_Toc448127578)

[7.12.5参考资料 74](#_Toc448127579)

[7.13教学单元十三 74](#_Toc448127580)

[7.13.1教学目标 75](#_Toc448127581)

[7.13.2教学内容（含重点、难点） 75](#_Toc448127582)

[7.13.3教学过程 75](#_Toc448127583)

[7.13.4作业安排及课后反思 79](#_Toc448127584)

[7.13.5参考资料 80](#_Toc448127585)

[7.14教学单元十四 80](#_Toc448127586)

[7.14.1教学目标 80](#_Toc448127587)

[7.14.2教学内容（含重点、难点） 80](#_Toc448127588)

[7.14.3教学过程 81](#_Toc448127589)

[7.14.4作业安排及课后反思 85](#_Toc448127590)

[7.14.5参考资料 85](#_Toc448127591)

[7.15教学单元十五 86](#_Toc448127592)

[7.15教学目标 86](#_Toc448127593)

[7.15.2教学内容（含重点、难点） 86](#_Toc448127594)

[7.15.3教学过程 86](#_Toc448127595)

[7.15.4作业安排及课后反思 89](#_Toc448127596)

[7.15.5参考资料 90](#_Toc448127597)

[7.16教学单元十六 90](#_Toc448127598)

[7.16教学目标 90](#_Toc448127599)

[7.16.2教学内容（含重点、难点） 90](#_Toc448127600)

[7.16.3教学过程 90](#_Toc448127601)

[7.16.4作业安排及课后反思 94](#_Toc448127602)

[7.16.5参考资料 94](#_Toc448127603)

[7.17教学单元十七 94](#_Toc448127604)

[§7.3一般常数项级数 94](#_Toc448127605)

[7.17.1教学目标 95](#_Toc448127606)

[7.17.2教学内容（含重点、难点） 95](#_Toc448127607)

[7.17.3教学过程 95](#_Toc448127608)

[7.17.4作业安排及课后反思 98](#_Toc448127609)

[7.17.5参考资料 98](#_Toc448127610)

[7.18教学单元十八 99](#_Toc448127611)

[7.18.1教学目标 99](#_Toc448127612)

[7.18.2教学内容（含重点、难点） 99](#_Toc448127613)

[7.18.3教学过程 99](#_Toc448127614)

[7.18.4作业安排及课后反思 105](#_Toc448127615)

[7.18.5参考资料 105](#_Toc448127616)

[7.19教学单元十九 106](#_Toc448127617)

[7.19.1教学目标 106](#_Toc448127618)

[7.19.2教学内容（含重点、难点） 111](#_Toc448127619)

[7.19.3教学过程 111](#_Toc448127620)

[7.19.4作业安排及课后反思 113](#_Toc448127621)

[7.19.5参考资料 113](#_Toc448127622)

[7.20教学单元二十 113](#_Toc448127623)

[7.20.1教学目标 113](#_Toc448127624)

[7.20.2教学内容（含重点、难点） 113](#_Toc448127625)

[7.20.3教学过程 114](#_Toc448127626)

[7.20.4作业安排及课后反思 117](#_Toc448127627)

[7.20.5参考资料 117](#_Toc448127628)

[7.21教学单元二十一 118](#_Toc448127629)

[7.21.1教学目标 118](#_Toc448127630)

[7.21.2教学内容（含重点、难点） 118](#_Toc448127631)

[7.21.3教学过程 118](#_Toc448127632)

[7.21.4作业安排及课后反思 127](#_Toc448127633)

[7.21.5参考资料 127](#_Toc448127634)

[7.22教学单元二十二 127](#_Toc448127635)

[7.22.1教学目标 127](#_Toc448127636)

[7.22.2教学内容（含重点、难点） 127](#_Toc448127637)

[7.22.3教学过程 128](#_Toc448127638)

[7.22.4作业安排及课后反思 132](#_Toc448127639)

[7.22.5参考资料 132](#_Toc448127640)

[7.23教学单元二十三 133](#_Toc448127641)

[7.23.1教学目标 133](#_Toc448127642)

[7.23.2教学内容（含重点、难点） 133](#_Toc448127643)

[7.23.3教学过程 133](#_Toc448127644)

[7.23.4作业安排及课后反思 137](#_Toc448127645)

[7.23.5参考资料 137](#_Toc448127646)

[7.24教学单元二十四 138](#_Toc448127647)

[7.24.1教学目标 138](#_Toc448127648)

[7.24.2教学内容（含重点、难点） 138](#_Toc448127649)

[7.24.3教学过程 138](#_Toc448127650)

[7.24.4作业安排及课后反思 141](#_Toc448127651)

[7.24.5参考资 141](#_Toc448127652)

[7.25教学单二十五 142](#_Toc448127653)

[7.25.1教学目标 142](#_Toc448127654)

[7.25.2教学内容（含重点、难点） 142](#_Toc448127655)

[7.25.3教学过程 142](#_Toc448127656)

[7.25.4作业安排及课后反思 152](#_Toc448127657)

[7.25.5参考资料 152](#_Toc448127658)

[7.26教学单元二十六 152](#_Toc448127659)

[7.26.1教学目标 152](#_Toc448127660)

[7.26.2教学内容（含重点、难点） 153](#_Toc448127661)

[7.26.3教学过程 153](#_Toc448127662)

[7.26.4作业安排及课后反思 160](#_Toc448127663)

[7.26.5参考资料 160](#_Toc448127664)

[7.27教学单元二十七 160](#_Toc448127665)

[7.27.1教学目标 161](#_Toc448127666)

[7.27.2教学内容（含重点、难点） 161](#_Toc448127667)

[7.27.3教学过程 161](#_Toc448127668)

[7.77.4作业安排及课后反思 174](#_Toc448127669)

[7.27.5参考资料 175](#_Toc448127670)

[7.29教学单元二十九 175](#_Toc448127671)

[7.29.1教学目标 175](#_Toc448127672)

[7.29.2教学内容（含重点、难点） 175](#_Toc448127673)

[7.29.3教学过程 175](#_Toc448127674)

[7.29.4作业安排及课后反思 176](#_Toc448127675)

[7.29.5参考资料 176](#_Toc448127676)

[7.30教学单元二十九 176](#_Toc448127677)

[7.30.1教学目标 176](#_Toc448127678)

[7.30.2教学内容 176](#_Toc448127679)

[7.30.3教学过程 177](#_Toc448127680)

[7.30.4作业安排及课后反思 177](#_Toc448127681)

[7.3 0.5参考资料 177](#_Toc448127682)

[课程结语 178](#_Toc448127683)

[8．课程要求 178](#_Toc448127684)

[8.1学生自学要求 178](#_Toc448127685)

[8.2课外阅读要求 178](#_Toc448127686)

[9．课程考核 178](#_Toc448127687)

[9.1出勤、作业等的要求 178](#_Toc448127688)

[9.2成绩的构成与评分规则说明 179](#_Toc448127689)

[9.3考试形式及说明 179](#_Toc448127690)

[10．学术诚信 179](#_Toc448127691)

[10.1考试违规与作弊处理 179](#_Toc448127692)

[11．课堂规范 179](#_Toc448127693)

[11.1课堂纪律 179](#_Toc448127694)

[11.2课堂礼仪 179](#_Toc448127695)

[12．课程资源 180](#_Toc448127696)

[12.1教材与参考书 180](#_Toc448127697)

[12.3网络课程资源 180](#_Toc448127698)

[13．教学合约 180](#_Toc448127699)

# 1．教学理念

高等数学B是文科本科学生进入大学学习的一门重要基础理论课程，知识点多、内容抽象，概念多、难点多，与学生在中学的数学基础知识水平与能力衔接紧密，对学生的思维能力与运算能力要求较高。高等数学的学习方法与中学的学习方法有差异，不仅要学生知道怎么做，还要求学生会分析为什么这样做，由于知识内容多，不可能象中学那样经过大量重复训练来达到会做的目的。所以教学方法与教学要求与学生原来的认知必然存在差异。

针对高等数学课程的特点与学生的实际情况，在教学中的基本任务是讲清楚高数的基本概念和基本知识，教给学生高数的基本方法与基本技巧，基本的分析问题与解决问题的能力。具体在定理、例题教学中，注重分析，讲清楚如何破题（就是教学生为什么这样做），理解定理、公式、概念的内涵。当然这一切紧靠课堂是不够的，应该充分调动学生的学习积极性，培养学生的学习与自我学习能力，必须进行一定数量的习题练习来巩固所学知识与能力。

在上课期间，利用课余时间与学生积极沟通，及时发现学生对教学的意见与建议，并在教学中进行合理的调整，有利于课程的实施。严格学生考勤，强化课堂纪律，课堂管理到位。对问题较多的作业与发现的一些共性问题，及时在课堂上进行详细讲解，帮助学生把问题理解清楚。

# 2．课程介绍

## 2.1课程的性质

必修

## 2.2课程在学科专业结构中的地位、作用

高等数学是一门重要的理论基础学科，他是各门学科的一种工具.提供学生进行专业学习的数学基础知识与培养学生的科学修养，培养学生理性思维方式、严谨的思维能力，提高学生的科学素养；培养学生分析问题、解决问题的能力。

## 2.3课程的前沿及发展趋势

“高技术本质上是一种数学技术”， 数学教育本质上也是一种素质教育，它在启迪心智，增进素质已得到空前普遍的重视。学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要领会数学的精神实质和思想方法。如果将数学仅仅看成是数学知识的传授，特别是那种照本宣科式的传授，那么即使包罗了再多的定理和公式，可能仍免不了沦为一堆僵死的教条，而难以发挥作用;而掌握了数学的思想方法和精神实质，就可以由不多的几个公式演绎出千变万化的生动结论，显示出无穷无尽的威力.今后高等数学不仅注重知识的掌握，而且应该注重知识的应用，分析问题与解决问题能力的培养与独立思考能力的培养，不仅要教学生学习知识，还要培养学生自主学习的能力与方法。

## 2.4学习本课程的必要性

高等数学是一门基础学科，是掌握各门学科知识技能的基础，通过学习能培养学生的数学素质、思维素质、科学态度与治学精神、创新精神与创新能力，能培养学生分析问题与解决问题的能力。

# 3．教师简介

李放，副教授，本科，1983年毕业于西南师范学院数学专业，研究方向是基础数学

# 4．先修课程

初等数学

# 5．课程目标

## 5.1知识与技能方面

1、知识方面：掌握文科各专业所必需的有关微积分、空间解析几何、常微分方程、无穷级数等方面的基本概念，基本理论和基本运算技能，强化应用，为学习后继课程和进一步获得数学知识奠定必要的数学基础。

2、能力方面：通过本课程的学习，培养学生具有比较熟练的计算能力，分析能力，自学能力，抽象概括问题的能力，从而能够正确的运用所学知识解决实际问题，全面培养和提高学生的辩证思维、逻辑推理能力和微积分运算技巧，提高学生的科学素养。

## 5.2过程与方法方面

1、过程：由于数学的高度抽象性，严密的逻辑性和广泛的应用性的特点，要达成目标，注重知识与能力的落实是关键，注重知识的联系，讲清楚概念、公式、定理的理解，落实例习题的训练，坚持自主学习能力的培养，优化理论体系（繁琐复杂的证明与计算可以适当弱化，淡化某些特殊的技巧）。

2、方法：充分调动学生学习的积极性，提高学生学习的兴趣，加强课堂管理，提高课堂效率，鼓励学生多提问，加强辅导，加强学生之间、学生与老师之间的互动，加强学生的自主学习与相互学习。

## 5.3情感、态度与价值观方面

1、情感、态度：认真、严格的数学学习和训练，可以使学生树立明确的数量观念，凡事“胸中有数”;可以提高学生的逻辑思维能力，思路清晰，条理分明;有助于培养学生认真细致、严谨踏实、一丝不苟的作风;可以使学生养成精益求精的风格;可以提高学生使用数学知识处理现实世界中各种复杂问题的意识和能力;可以使学生增强拼搏精神的应变能力;可以调动学生的探索精神和创造力;可以使学生具有数学上的直觉和想像力等等。这些特有的素质和能力，是只有或主要通过数学的学习才能逐步培养形成的。

2、价值观：学习不仅仅是为了考试，它是人生各种品质的培养过程，它会影响到今后的工作与生活的各个方面。高数它不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种修养；不仅是一种科学，而且是一种文化。

# 6．课程内容

## 6.1课程的内容概要

高等数学B内容包括函数与极限、一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程、解析几何与向量代数、级数六个部分；通过学习培养学生理性思维方式、严谨的思维能力，提高学生的科学素养；培养学生分析问题、解决问题的能力，同时也为专业课程的学习提供必要的数学基础。

## 6.2教学重点、难点

教学重点：函数、复合函数、极限、连续、导数与微分、函数极值、常微分方程的概念，不定积分与定积分、二重积分、常数项级数的概念和性质；基本初等函数的图形和性质；极限与导数四则运算法则；用两个重要极限与等价无穷小求极限.导数的几何意义及函数的可导性与连续性之间的关系，一元与多元复合函数的求导法则，基本初等函数的导数公式；高阶导数的求法；微分的求法. 罗尔定理、拉格朗日中值定理，洛必达法则，用导数判断函数的单调性与凹凸性、极值与拐点的求法。不定积分的基本公式，不定积分与定积分的换元积分法和分部积分法。变上限积分的导数；微积分基本公式。定积分的微元法，平面图形面积，旋转体体积，平面曲线的弧长。可分离变量的微分方程、一阶线性微分方程、可降价的高阶微分方程、二阶线性常系数齐次方程及其解法、二阶线性常系数非齐次方程（两种特殊情况）的解法。空间直角坐标系，平面及其方程，常用二次曲面的方程与图形.偏导数与全微分的概念及求法，隐函数求导公式，多元函数的极值及其求法，偏导数的应用.二重积分的计算方法，二重积分的应用。常数项级数的审敛法，幂级数的收敛半径和收敛区间的求法。幂级数在收敛区间内的性质，函数展开成泰勒级数的条件及方法，幂级数在收敛区间内的和函数及某些数项级数的和的求法。

难点：概念、性质、公式、定理的理解与应用，极限的求法，定积分与不定积分，一元（多元）复合函数导数（偏导数）的求法，微分方程的求解，级数收敛性的判定及函数展开为级数。

## 6.3学时安排

该课程分为理论授课160个学时，学时安排如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 章次 | 教学内容 | 授课学时 |
| 一 | 函数、极限与连续 | 24 |
| 二 | 导数与微分 | 16 |
| 三 | 中值定理与导数的应用 | 18 |
| 四 | 不定积分 | 14 |
| 五 | 定积分及其应用 | 22 |
|  | 第一学期总复习 | 2 |
| 六 | 多远函数微积分 | 28 |
| 七 | 无穷级数 | 12 |
| 八 | 微分方程与差分方程 | 22 |
|  | 第二学期总复习 | 2 |
|  | 合计 | 160 |

# 7．《高等数学》理论课程实施过程

## 7.1教学单元一

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第1单元 | §6.1空间解析几何简介（1） |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.1.1教学目标

1、理解向量的概念及其表示，掌握向量的线性运算，了解两向量平行的充要条件；

2、理解空间直角坐标系，会求两点间的距离，理解向量的坐标表达式，掌握向量的代数运算，理解单位向量与方向余弦，了解向量在轴上的投影。

## 7.1.2教学内容（含重点、难点）

1、向量的概念，向量的加减法，向量与数的乘法；

2、两向量平行的充要条件，数轴上的向量及其表示；

3、空间直角坐标系，两点间的距离，向量的坐标表达式，向量的代数运算，单位向量与方向余弦，向量在轴上的投影。

【重点】向量的概念和向量的运算；空间直角坐标系，向量的坐标表达式及代数运算，单位向量及方向余弦。

【难点】向量的概念；空间直角坐标系，向量在轴上的投影。

## 7.1.3教学过程

**一、承上启下：**

本章引言：介绍空间解析几何的产生和解析几何的基本思想，介绍数学家笛卡尔所作的贡献，以及向量在分析问题和处理问题中的重要性。

（到此课程大概进行到 5 分钟）

**二、新课讲授**

**（一）向量及其线性运算（**§8.1**）**

注：由于学生在高中也学过其中部分内容，此部分内容以复习重点讲解为主。

**（1）向量的概念**

分析人们常遇到的两类量，引出向量及其相关概念和向量的表示。

（到此课程大概进行到 10 分钟）

**（2）向量的线性运算**

回顾数的加减法运算及运算规律，类比引入向量的加减法及运算规律，并作几何解释；介绍向量与数的乘法及其运算规律。

**（3）例题选讲：**

以教材上的例子和本节后面的练习为准选择2-3例，就向量的加、减和数与向量的乘法具体的运算进行示范讲解。

（到此课程大概进行到 20 分钟）

**（4）向量平行的充要条件**

分析数与向量的乘法，介绍两向量平行的表示问题，并介绍两向量平行的充要条件（定理1），阐明的重要意义，并介绍点与数的1-1对应关系。

（到此课程大概进行到 30 分钟）

**（5）例题选讲：**

选择1-2例，就平行向量的运用进行示范讲解。

（到此课程大概进行到 35 分钟）

**（二）空间直角坐标系 向量的坐标（**§8.2**）**

**（1）空间直角坐标系**

结合PPT进行直观展示，分析点的定位和几何问题代数化，引入空间直角坐标系的概念，介绍点的坐标。

（到此课程大概进行到 40 分钟）

**（2）空间两点间的距离**

借助PPT直观展示，利用数轴上两点间的距离公式导出空间两点间的距离公式，并引导学生与平面上两点间距离公式类比，以让学生尽快掌握该公式。

选择1-2例，通过证明一三角形是等腰三角形或求一点的坐标的问题介绍公式的应用

例1 求证以、、三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.



解



从而原结论成立.



例2 (E01) 设P在x轴上, 它到的距离为到点的距离的两倍, 求点P的坐标.



解 因为在轴上，设点坐标为



所求点为



**（3）向量的坐标表示**

结合PPT动态演示，分析向量几何运算的代数化问题，引入向量的坐标表达式和向量的坐标。

（到此课程大概进行到 50 分钟）

**（4）向量的代数运算**

利用向量在直角坐标系中的坐标表达式，介绍向量的代数运算法则。

以教材9页例2和例3为例，进一步介绍向量的代数运算法则。

（到此课程大概进行到 60 分钟）

**（5）向量的模与方向余弦**

回顾两点间的距离公式，引出向量的模，并作几何解释，由通过PPT直观分析，导出方向角，方向余弦的概念。

根据教材所提供的例子和后面的练习就向量的模、方向角和方向余弦及相关问题选择2-3例进行讲解。

（到此课程大概进行到 75 分钟）

**（6）向量在轴上的投影**

介绍向量在轴上的投影及其性质，并讲解教材11页例6，加深学生的了解。

（到此课程大概进行到 85 分钟）

**三、知识小结**

引导学生总结本次课的主要内容和归纳解题方法。并结合PPT进行直观展示

（到此课程大概进行到90分钟）

## 7.1.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题8-1：2、3、4题（1题作为思考题，适时评讲）

习题8-2：6、7、10、14

【课后反思】1、什么叫向量？

2、如何用向量的坐标进行线性运算？

3、向量平行的充要条件是什么？

4、如何求向量的模及方向余弦？

5、作空间直角坐标系应注意哪些问题？

【课后思考】从点沿向量方向取长为34的线段, 求点的坐标.



【课后预习】向量的数量积、向量积

## 7.1.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．

## 7.2教学单元二

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第2单元 | §6.1空间解析几何简介（2） |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.2.1教学目标

1、让学生掌握曲面方程的概念，会求简单的旋转曲面，柱面的方程；

2、理解并掌握空间曲线的参数方程和一般方程，了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求该投影曲线的方程。

3、了解平面方程的主要形式及求平面方程的简单方法；

4、了解直线方程的主要形式及其求法；

## 7.2.2教学内容（含重点、难点）

1、曲面方程的概念，旋转曲面及柱面的方程；

2、空间曲线的参数方程和一般方程，空间曲线在坐标平面上的投影。

3、平面方程的常见形式（点法式、一般式、截距式）及方程的确定；

4、空间直线的常见形式（一般方程、对称式方程、参数方程）及方程的确定；

【重点】曲面方程的概念，旋转曲面和柱面；空间曲线的方程，空间曲线的投影及投影曲线方程。求平面和直线方程的方法，

【难点】曲面方程的概念；空间曲线在坐标平面上的投影及其投影曲线方程。

## 7.2.3教学过程

**一、曲面及方程**

**（1）复习**

回顾空间直角坐标系，与平面解析几何曲线问题类比，引出本节要学习和讨论的问题。（到此课程大概进行到5分钟）

**（2）曲面方程的概念**

回顾平面解析几何中讲平面曲线视为动点轨迹，经类比，导出曲面方程的概念。（结合PPT进行展示）

例题选讲：（从下列例子中选择2-3例讲解，介绍如何求曲面方程和已知方程研究几何形状）

例1 建立球心在点、半径为R的球面方程.



解 设是球面上任一点，根据题意有



特别地:球心在原点时方程为



例2 方程表示怎样的曲面？



解 对原方程配方，得



所以，原方程表示的球心在半径为的球面方程.



例3 已知 求线段的垂直平分面的方程.



例4 方程表示怎样的曲面？



例5 方程的图形是怎样的?



（到此课程大概进行到 20分钟）

**（3）旋转曲面及方程**

介绍旋转曲面的概念，引导学生分析几何特征，导出由平面曲线绕坐标轴旋转所形成的曲面方程。（结合PPT进行展示）

例题选讲：（以下列两例为例，介绍求旋转曲面方程的方法）

例6 将坐标面上的曲线分别绕x轴和z轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.



例7 直线L绕另一条与L相交的定直线旋转一周, 所得旋转曲面称为叫圆锥面. 两直线的交点称为圆锥面的顶点, 两直线的夹角称为圆锥面的半顶角. 试建立顶点在坐标原点, 旋转轴为z轴, 半顶角为的圆锥面方程.



（到此课程大概进行到35分钟）

**（4）柱面及方程**

分析圆柱面的几何特征，给出柱面的概念。

通过分析方程的特征及所表示的空间图形，介绍平行坐标轴的柱面方程以及常见的柱面（圆柱面、椭圆柱面、双曲柱面、抛物柱面）。



定义1在空间直角坐标系中，如果曲面上任一点坐标都满足方程，而不在曲面S上的任何点的坐标都不满足该方程，则方程称为曲面S的方程, 而曲面S就称为方程的图形



空间曲面研究的两个基本问题是:

(1) 已知曲面上的点所满足的几何条件，建立曲面的方程;

(2) 已知曲面方程，研究曲面的几何形状.

平面

平面是空间中最简单而且最重要的曲面. 可以证明空间中任一平面都可以用三元一次方程

(1.3)



来表示，反之亦然. 其中、、、是不全为零常数. 方程(1.3)称为平面的一般方程.



柱面

定义2 平行于某定直线并沿定曲线C移动的直线所形成的轨迹称为柱面. 这条定曲线C称为柱面的准线, 动直线称为柱面的母线.



二次曲面

在空间直角坐标系中，我们采用一系列平行于坐标面的平面去截割曲面，从而得到平面与曲面一系列的交线（即截痕），通过综合分析这些截痕的形状和性质来认识曲面形状的全貌. 这种研究曲面的方法称为平面截割法，简称为截痕法.

椭球面 (1.4)



椭圆抛物面 （）



双曲抛物面 ( 与同号)



单叶双曲面



双叶双曲面



二次锥面



（到此课程大概进行到45 分钟）

**二、空间曲线及方程**

**（1）空间曲线的一般方程**

回顾曲面及曲面方程，分析两曲面相交的情况，引出空间曲线的一般方程（即交面式方程），并引导学生注意方程在形式上与以往学过的方程有什么不同

例题选讲：（从下列例子中选择1-2例，分析由两个三元构成的方程组所表示的几何图形）

例8 方程组 表示怎样的曲线?



例9 方程组表示怎样的曲线?



（到此课程大概进行到55 分钟）

**三、平面及方程**

**（1）点法式方程**（结合PPT进行展示）

直观分析确定空间平面位置，引出利用已知平面上一点和法向量求该平面方程的方法，给出平面的点法式方程。

举例说明：

**例10**求过点且与平面平行的平面方程.



**（2）一般方程**（结合PPT进行展示）

分析平面点法式方程的特征，归纳导出平面的一般方程；

分析一般方程中系数与平面位置和法向量的关系，介绍平行坐标面、平行坐标轴、过原点等特殊平面的方程。

例11 求通过轴和点的平面方程.



解 设所求平面的一般方程为因为所求平面通过轴，且法向量垂直于轴,于是法向量在轴上的投影为零，即



又平面通过原点，所以从而方程成为 (1)



又因平面过点因此有即 以此代入当成(1)，再除以便得到所求方程为



例12 求平行于轴且过, 两点的平面方程.



解 因所求平面平行于轴，故可设其方程为



又点 和都在平面上，于是



代入方程得



显然 消去并整理可得所求的平面方程



例13 设平面在坐标轴上的截距分别为求这个平面的方程.



解 由已知条件得所求平面方程为



即



（到此课程大概进行到70 分钟）

**四、空间直线与方程**

**（1）一般方程**

回顾空间曲线的一般方程，类比导出空间直线的一般方程，并作几何解释。

**（2）对称式（点向式）方程**

直观分析确定空间直线的位置，回顾向量的坐标及两向量平行的充要条件，导出空间直线的对称式方程及相关概念。

例题选讲：（从下面例子中酌情选择2-3例进行讲解，介绍求空间直线的对称式方程和参数方程）

**例11** 求过点且与两个平面和的交线平行的直线的方程.



**例12** 设一直线过点且与*y*轴垂直相交, 求其方程.



**例13** 用对称式方程及参数方程表示直线



**五、知识小结**

通过PPT回顾总结本次课的主要内容和归纳相关的解题方法。

（到此课程大概进行到90分钟）

## 7.2.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题6-1：7； 12

【课后反思】如何由母线方程求旋转曲面方程？柱面方程有何特征？如何求空间曲线（或立体）在坐标面上的投影？

【课后思考】习题6-1：9；

【课后预习】多元函数的基本概念。

## 7.2.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．

## 7.3教学单元三

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第3单元 | §6.2多元函数的  基本概念 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.3.1教学目标

1、让学生理解外点，内点，边界，聚点的概念，理解二元函数的几何意义。

2、掌握邻域，开集，闭集，区域，开区域，闭区域，连通集，有界集，无界的概念。

3、掌握n维空间的概念，二元函数的概念。

4、学习二元函数的连续性，二元函数的极限求法。

## 7.3.2教学内容（含重点、难点）

1、二元函数的一些相关概念。

2、有界闭区域上二元连续函数的性质定理。

【重点】二元函数的概念，邻域的概念，二元函数的极限概念，有界闭区域上连续的二元函数的三大性质定理。

【难点】二元函数极限概念，如何求二元函数的极限，证明二元函数的极限不存在。

## 7.3.3教学过程

**一、复习提问**

常见的几种二次曲面：抛物面，双曲面，锥面的方程， 3名同学回答，教师评价记入登分册分册。（到此课程进行5分钟）

**二、新课讲解**

**（1）**本课程的开始首先出示邻域，外点，内点，边界，聚点，开集，闭集，开集，闭集，区域，开区域，闭区域，连通集，有界集，无界集概念的相关教学幻灯片，展示n维空间的概念，并在此基础上提出二元函数的概念，利用多媒体动态演示，举两个前面学习过的二次曲面方程帮助学生理解二元函数的几何意义（因为概念很多，留5分钟让学生熟悉一下这些概念，到此课程进行25分钟）

二元函数的概念

定义1 设D是平面上的一个非空点集，如果对于内的任一点，按照某种法则，都有唯一确定的实数与之对应，则称是上的二元函数，它在处的函数值记为，即，其中x，y称为自变量， z称为因变量. 点集D称为该函数的定义域，数集称为该函数的值域.



类似地，可定义三元及三元以上函数. 当时, n元函数统称为多元函数.



二元函数的几何意义

例1 某公司的总体成本（以千元计）为

，



其中是员工工资，是原料的开销，是广告宣传的开销，是机器的开销，求。



解 用2替换，3替换，0替换，10替换，则



（千元）。



例2 求二元函数的定义域.



解



所求定义域为



例3 已知函数 求.



解 设则



故得



即有



**（2）**提出二元函数极限的概念，着重强调二元函数极限概念中和一元函数相区别的地方，在黑板旁边手绘图形帮助学生理解二元函数极限概念，根据二元函数极限存在的概念，和学生一起探讨如何证明一个二元函数极限不存在的方法，并举两个实例。（到此课程进行40分钟）

**二元函数的极限**

定义2 设函数在点的某一去心邻域内有定义，如果当点无限趋于点时，函数无限趋于一个常数，则称A为函数当 时的极限. 记为



.



或 （）



也记作

或



二元函数的极限与一元函数的极限具有相同的性质和运算法则，在此不再详述. 为了区别于一元函数的极限，我们称二元函数的极限为二重极限.

**（3）**和学生一起回忆在高等数学上册，求一元函数的极限的一些方法，帮助学生理解和接受利用其中一些方法来求二元函数的极限，并作总结，要求学生记笔记。求二元函数的极限举例 （到此课程进行60分钟）

例4 求极限 .



解 令则



=0.



例5 求极限



解 其中



所以



例6 求极限 .



解 当时，



所以



例7求极限



解 (当



所以



例8 求



解 因为



而



所以 故



例9 证明 不存在.



证 取为常数),则



易见题设极限的值随的变化而变化,故题设极限不存在.



例10 证明 不存在.



证 取其值随的不同而变化, 故极限不存在.



**（4）**提出二元函数连续性的概念，给出二元初等函数的概念，并举例利用连续性求二元函数的极限（到此课程进行70分钟）

二元函数的连续性

定义3 设二元函数在点的某一邻域内有定义，如果



,



则称在点处连续. 如果函数在点处不连续，则称函数在处间断.



与一元函数类似，二元连续函数经过四则运算和复合运算后仍为二元连续函数. 由和的基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的可用一个式子表示的二元函数称为二元初等函数. 一切二元初等函数在其定义区域内是连续的. 这里定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域. 利用这个结论，当要求某个二元初等函数在其定义区域内一点的极限时，只要算出函数在该点的函数值即可.



**（5）**对照闭区间上连续的一元函数的三大性质定理并举例结合几何图形讲解有界闭区域上连续的二元函数的三大性质定理。

在有界闭区域上连续的二元函数也有类似于一元连续函数在闭区间上所满足的定理. 下面我们不加证明地列出这些定理.



定理1（最大值和最小值定理） 在有界闭区域D上的二元连续函数, 在D上至少取得它的最大值和最小值各一次.

定理2（有界性定理）在有界闭区域D上的二元连续函数在D上一定有界.

定理3（介值定理）在有界闭区域D上的二元连续函数, 若在D上取得两个不同的函数值, 则它在D上取得介于这两值之间的任何值至少一次.

**三、知识小结**

小结本次课的主要内容 （到此课程进行85分钟）

**四、课堂练习**

根据学生掌握情况临时选题（到此课程进行90分钟）

## 7.3.4作业安排及课后反思

【课后作业】6.2 4（3）， 5（2）（5）（6） ， 6（3） ， 8

## 7.3.5参考资料

1、高等数学第六版下册，同济大学数学系，高等教育出版社，2007.06 第53-58页

2、高等数学辅导，上海理工大学高等数学教研室，上海财经大学出版社，2005.10

第235-237页

高等数学解题方法与技巧，贺才兴，上海交通大学出版社，2011.01第311-314页

高等数学学习指导下册，方晓华，中国铁道出版社，2010.02第68-71页

高等数学辅导及习题精解（同济六版下册），张天德，延边大学出版社2014.06第55-58页

## 7.4教学单元四

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第4单元 | §6.3偏导数 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.4.1教学目标

1、掌握偏导数的定义，理解多元函数的偏导数和一元函数的导数之间的相同点和不同点。

2、理解偏导数的几何意义。

3、熟练掌握偏导数的求法。

## 7.4.2教学内容（含重点、难点）

1、二元函数的偏导数的定义。

2、二元函数的偏导数的求法。

【重点】二元函数的偏导数的定义，如何用求出多元函数的偏导数。

【难点】用定义求某些分段函数在分界点处的偏导数，如何求抽象函数的偏导数，特别是抽象函数的高阶偏导数。

## 7.4.3教学过程

**一、复习提问**

提问：二元函数的极限，二元函数的连续性，求二元函数极限的一些常见的方法， 2名同学回答，教师评价记入登分册分册。（到此课程进行5分钟）

**二、新课讲解**

（1）本课程的开始首先举一个引例，说明在实际应用中多元函数的广泛性，为什么要引进多元函数的偏导数。再以二元函数为例，给出偏导数的定义，结合几何图形着重强调多元函数的偏导数和一元函数的导数之间的区别和联系，包括符号的正确书写，这是学生不容易弄清楚的地方。（到此课程进行25分钟）

偏导数的定义及其计算法

定义1 设函数在点的某一邻域内有定义, 当y 固定在而x在处有增量时, 相应地函数有增量



如果存在, 则称此极限为函数在点处对x的偏导数, 记为



例如，有

.



类似地，函数在点处对y的偏导数为



,



记为



上述定义表明，在求多元函数对某个自变量的偏导数时, 只需把其余自变量看作常数，然后直接利用一元函数的求导公式及复合函数求导法则来计算之.

（2）以二元函数为例，并结合几何图形帮助学生理解偏导数的几何意义。（到此课程进行35分钟）

偏导数的几何意义

设曲面的方程为，是该曲面上一点，过点作平面，截此曲面得一条曲线，其方程为



则偏导数表示上述曲线在点处的切线对轴正向的斜率（图6-3-1）. 同理，偏导数就是曲面被平面所截得的曲线在点处的切线对y轴正向的斜率.



（3）和学生一起回忆一元函数的一些求导法则，举例帮助学生学会利用一元函数的求导法则求出一些多元初等函数关于某个自变量的在一点的偏导数以及偏导函数。（到此课程进行55分钟）

例1 求在点(1, 2)处的偏导数.



解 把看作常数,对求导得到



把看作常数,对求导得到



故所求偏导数



例2 求的偏导数.



解



例3 求三元函数的偏导数.



解 把和看作常数,对求导得



把和看作常数,对求导得



把和看作常数,对求导得



例4 求的偏导数.



解 把和看作常数,对求导得



利用函数关于自变量的对称性, 可得



（4）举例说明如何用定义求分段函数在分界点处的偏导数（到此课程进行63分钟）

例5 试证函数 的偏导数存在，但在点不连续.



证



即偏导数存在.但由上节的例 8知道,极限不存在,故在点不连续.



（5）举例说明如何求抽象函数的偏导数，特别强调符号的正确书写。（到此课程进行71分钟）

（6）给出高阶偏导数的定义，举例求高阶偏导数（到此课程进行80分钟）

高阶偏导数

设函数在区域内具有偏导数



则在内和都是、的函数. 如果这两个函数的偏导数存在，则称它们是函数的二阶偏导数. 按照对变量求导次序的不同，共有下列四个二阶偏导数：



其中第二、第三两个偏导称为混合偏导数.

类似地，可以定义三阶、四阶、阶偏导数. 我们把二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.



定理1 如果函数的两个二阶混合偏导数及在区域D内连续, 则在该区域内有.



例7（E05）设, 求



解



例8 设 求二阶偏导数.



解



例9（E06）求的二阶偏导数.



解



例10验证函数 满足方程



.



证



例11证明函数满足拉普拉斯方程



,



其中 .



证



由函数关于自变量的对称性,得



例12设 , 试求 及



解 因



当时，



所以



同理有



当时，



所以



**三、知识小结**

小结本次课的主要内容 （到此课程进行85分钟）

**四、课堂练习**

根据学生掌握情况临时选题（到此课程进行90分钟）

## 7.4.4作业安排及课后反思

【课后作业】6.3 1（6），（10） 2 4 5（2） 7

## 7.4.5参考资料

1、高等数学第六版下册，同济大学数学系，高等教育出版社，2007.06 第58-60页

2、高等数学辅导，上海理工大学高等数学教研室，上海财经大学出版社，2005.10

第237-239页

3、高等数学解题方法与技巧，贺才兴，上海交通大学出版社，2011.01第314-317页

4、高等数学学习指导下册，方晓华，中国铁道出版社，2010.02第72-74页

5、高等数学辅导及习题精解（同济六版下册），张天德，延边大学出版社2014.06第58-60页

## 7.5教学单元五

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第5单元 | §6.4全微分及其应用 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.5.1教学目标

1、理解偏增量，偏微分，全增量的概念。

2、掌握全微分的定义。

3、熟练掌握全微分的求法。

4、掌握全微分的近似计算。

## 7.5.2教学内容（含重点、难点）

1、二元函数的全微分的定义。

2、可微的必要条件。

3、可微的充分条件。

4、微分在近似计算方面的应用。

【重点】微分的定义，如何求出多元函数的微分。

【难点】二元函数在一点极限存在，连续性，偏导数存在，偏导数存在且连续，可微这几者之间的关系。

## 7.5.3教学过程

**一、复习提问**

提问：二元函数的偏导数，偏导数的几何意义，2名同学回答，教师评价评价记入登分册分册。（到此课程进行5分钟）

**二、新课讲解**

（1）本课程的开始首先让学生回忆一元函数在一点可微的定义，说明在一元函数中微分是函数值增量的近似值，由此引导学生理解一元函数的微分推广到多元函数就是全微分。二元函数对某个自变量的偏导数表示当另一个自变量固定时，因变量相对于该自变量的变化率，由此引进偏增量和偏微分的概念。（到此课程进行8分钟）

二元函数对某个自变量的偏导数表示当其中一个自变量固定时，因变量对另一个自变量的变化率. 根据一元函数微分学中增量与微分的关系，可得



上面两式左端分别称为二元函数对x和对y的偏增量，而右端分别称为二元函数对x和对y的偏微分.

（2）举例说明在实际应用中需要研究多元函数中的各个自变量都取得增量时。变量获得的增量，即全增量问题，由此，以二元函数为例，引进全增量和全微分的概念，着重讲解全微分的定义。（到此课程进行25分钟）

在实际问题中，有时需要研究多元函数中各个自变量都取得增量时因变量所获得的增量，即所谓全增量的问题. 下面以二元函数为例进行讨论.

如果函数在点的某邻域内有定义，并设为这邻域内的任意一点，则称



为函数在点P对应于自变量增量的全增量，记为，即



(4.1)



一般来说，计算全增量比较复杂. 与一元函数的情形类似，我们也希望利用关于自变量增量的线性函数来近似地代替函数的全增量，由此引入关于二元函数全微分的定义.



定义1 如果函数在点的全增量



可以表示为

(4.2)



其中A,B不依赖于而仅与x, y有关,则称函数在点可微分, 称为函数在点的全微分, 记为 即



. (4.3)



若函数在区域D内各点处可微分，则称这函数在D内可微分.

（3）以二元函数为例，证明函数在一点可微与函数在一点连续的关系。并举例说明。（到此课程进行32分钟）

（4）以二元函数为例，证明函数可微的必要条件，并在证明过程中自然得到微分定义中的两个常数，即得到二元函数全微分的准确表达式，此时学生自然理解和接受全微分符合偏微分的叠加原理。同时，举反例佐证这条件必要不充分。（到此课程进行42分钟）

定理1 (必要条件) 如果函数在点处可微分, 则该函数在点的偏导数必存在, 且在点处的全微分



. (4.4)



我们知道，一元函数在某点可导是在该点可微的充分必要条件. 但对于多元函数则不然. 定理1 的结论表明，二元函数的各偏导数存在只是全微分存在的必要条件而不是充分条件.

由此可见，对于多元函数而言，偏导数存在并不一定可微.因为函数的偏导数仅描述了函数在一点处沿坐标轴的变化率，而全微分描述了函数沿各个方向的变化情况. 但如果对偏导数再加些条件，就可以保证函数的可微性. 一般地，我们有：

定理2 (充分条件) 如果函数的偏导数在点连续, 则函数在该点处可微分.



（5）以二元函数为例，说明函数在一点可微的充分条件。证明略。（到此课程进行50分钟）

（6）画图表帮助学生记忆二元函数在一点极限存在，连续性，偏导数存在，偏导数存在且连续，可微这几者之间的关系（到此课程进行55分钟）

（7）举例说明怎么求多元函数的微分。（到此课程进行68分钟）

例1 求函数的全微分.



解 因为



例2 计算函数在点(2, 1)处的全微分.



解 因为所以



从而所求全微分



例3 求函数 的全微分.



解 由



故所求全微分



例4 求函数的偏导数和全微分.



解



（8）由微分的定义推导写出全微分的近似计算公式，并举例。（到此课程进行80分钟）

例5 求函数在点（3，2）处的线性化。



解 首先求和在点（3，2）处的值：



于是在点（3，2）处的线性化为



例6 计算的近似值.



解 设函数



由二元函数全微分近似计算公式得



例7 测得矩形盒的边长为75cm、60cm以及40cm，且可能的最大测量误差为0.2cm. 试用全微分估计利用这些测量值计算盒子体积时可能带来的最大误差.

解 以、、为边长的矩形盒的体积为



所以



由于已知 为了求体积的最大误差,取



再结合得



即每边仅0.2cm的误差可以导致体积的计算误差过到



**三、知识小结**

小结本次课的主要内容 （到此课程进行85分钟）

**四、课堂练习**

根据学生掌握情况临时选题（到此课程进行90分钟）

## 7.5.4作业安排及课后反思

【课后作业】6.4 1（3） 2 3 4 5（2） 7

## 7.5.5参考资料

1、高等数学第六版下册，同济大学数学系，高等教育出版社，2007.06 第61-63页

2、高等数学辅导，上海理工大学高等数学教研室，上海财经大学出版社，2005.10

第240-243页

3、高等数学解题方法与技巧，贺才兴，上海交通大学出版社，2011.01第318-320页

4、高等数学学习指导下册，方晓华，中国铁道出版社，2010.02第74-75页

5、高等数学辅导及习题精解（同济六版下册），张天德，延边大学出版社2014.06第61-63页

## 7.6教学单元六

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第6单元 | §6.5复合函数微分法与隐函数的微分法（1） |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.6.1教学目标

1、熟练掌握多元复合函数的链式法则。

2、理解全微分的形式不变性。

## 7.6.2教学内容（含重点、难点）

1、多元复合函数的链式法则。

2、全微分的形式不变性。

【重点】利用多元函数的链式法则求各种复合类型的多元函数的偏导数或全微分。

【难点】含抽象函数的多元复合函数的全微分求法，特别是符号的正确书写。

## 7.6.3教学过程

**一、复习提问**

提问：全微分的定义，二元函数在一点极限存在，连续性，偏导数存在，偏导数存在且连续，可微这几者之间的关系，2名同学回答，教师评价评价记入登分册分册。（到此课程进行5分钟）

**二、新课讲解**

（1）本课程的开始首先让学生回忆一元函数复合函数求导中的链式法则，引导学生理解多元复合函数的链式法则。由简单复合结构出发，讲解和证明复合函数的中间变量为一元函数的情形，并同时画出形象表达复合结构的树形图帮助学生理解和记忆，（此课程进行20分钟）

复合函数的中间变量为一元函数的情形

设函数,,构成复合函数



（5.1）



公式(5.1)中的导数称为全导数.



（2）将上述链式法则推广到复合函数的中间变量为多元函数的情形，引导学生记住两个自变量两个中间变量的链式法则的公式模板，其它类型的复合结构均可以按照此公式模板衍生出来，从而使得学生能够灵活应用。（此课程进行30分钟）

复合函数的中间变量为多元函数的情形

设构成复合函数



(5.3)



(5.4)



3、复合函数的中间变量既有一元也有为多元函数的情形

定理3 如果函数在点具有对及对的偏导数, 函数在点可导，函数在对应点具有连续偏导数, 则复合函数在对应点的两个偏导数存在, 且有



(5.7)



(5.8)



注：这里与是不同的，是把复合函数中的看作不变而对的偏导数，是把函数中的及看作不变而对的偏导数. 与也有类似的区别.



（3）举例说明怎么用链式法则求一些多元复合函数的偏导数，以及一些关于链式法则的证明题。（此课程进行55分钟）

例1 设而 求导数



解



例2 设而 求和



解



例3 求的偏导数.



解 设则



可得



则



例4 设 求和



解



（4）推导一些特殊复合结构的函数链式法则的衍生形式。并举例说明。（此课程进行70分钟）

在多元函数的复合求导中，为了简便起见，常采用以下记号:



这里下标1表示对第一个变量求偏导数，下标2表示对第二个变量求偏导数，同理有 等等.



例5 设 其中函数f有二阶连续偏导数，求和.



解 令记



同理记



（5）根据复合函数求偏导的链式法则，引导学生理解和应用全微分的形式不变性来求全微分。并举例。（到此课程进行83分钟）

全微分形式的不变性

根据复合函数求导的链式法则，可得到重要的全微分形式不变性. 以二元函数为例，设

,



是可微函数，则由全微分定义和链式法则，有



由此可见，尽管现在的u、v是中间变量，但全微分与、是自变量时的表达式在形式上完全一致. 这个性质称为全微分形式不变性. 适当应用这个性质，会收到很好的效果.



例6 利用全微分形式不变性解本节的例2.

设 而 求和



解



因代入后归并含及的项,得



即



比较上式两边的、的系数,得



它们与例2的结果一样.

**三、知识小结**

小结本次课的主要内容 （到此课程进行85分钟）

**四、课堂练习**

根据学生掌握情况临时选题（到此课程进行90分钟）

## 7.6.4作业安排及课后反思

【课后作业】6.5 1 3 4 5 6（1） 7 9

## 7.54.5参考资料

1、高等数学第六版下册，同济大学数学系，高等教育出版社，2007.06 第64-68页

2、高等数学辅导，上海理工大学高等数学教研室，上海财经大学出版社，2005.10

第243-248页）

高等数学解题方法与技巧，贺才兴，上海交通大学出版社，2011.01第321-324页

高等数学学习指导下册，方晓华，中国铁道出版社，2010.02第76-79页

高等数学辅导及习题精解（同济六版下册），张天德，延边大学出版社2014.06第64-67页

## 7.7教学单元七

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第7单元 | §6.5复合函数微分法与隐函数的微分法（2） |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.7.1教学目标

1、了解隐函数存在定理；

2、熟练掌握多元隐函数偏导数的求法。

## 7.7.2教学内容（含重点、难点）

1、隐函数存在定理；

2、多元隐函数偏导数的求法。

【重点】多元隐函数求偏导数的方法。

【难点】多元隐函数方程组偏导数的求法。

## 7.7.3教学过程

**一个方程的情形**

**（1）方程隐含函数的情形**



回顾一元微分学中的隐函数概念及求导法，请2名同学回答，教师评价评价记入登分册分册。指出这是利用直接法求隐函数的一阶导数，进一步导出一元隐函数的存在的充分条件和求一阶导数的公式（定理1），证明略，仅给出隐函数求导公式的推导，用PPT展示。例题选讲：选择1-2例，验证隐函数的存在性并求导数。引导学生如果将方程看作的情形，那么。（到此课程大概进行15分钟）



**（2）方程隐含函数的情形**



分析一元隐函数的存在定理、类比导出二元隐函数的存在条件和求偏导公式（定理2）。例题选讲：选择2-3例，求二元隐函数的偏导数及相关问题。

注：在实际应用中，求方程所确定的多元函数的偏导数时，不一定非得套公式，尤其在方程中含有抽象函数时，利用求偏导或求微分的过程则更为清楚。举两个例子加以说明。（到此课程大概进行80分钟）

在一元微分学中，我们曾引入了隐函数的概念，并介绍了不经过显化而直接由方程

(5.11)



来求它所确定的隐函数的导数的方法. 这里将进一步从理论上阐明隐函数的存在性，并通过多元复合函数求导的链式法则建立隐函数的求导公式，给出一套所谓的“隐式”求导法.

定理4 设函数在点的某一邻域内具有连续的偏导数, 且则方程在点的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 它满足 并有



(5.12)



定理5 设函数在点的某一邻域内有连续的偏导数, 且



则方程在点的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数, 它满足条件,并有



(5.14)



例12 验证方程在点(0, 1)的某邻域内能唯一确定一个有连续导



数、当时的隐函数,求这函数的一阶和二阶导数在的值.



证 令则



依定理知方程在点的某领域内能唯一确定一个有连续导数,当时的隐函数函数的一阶和二阶导数为



例13 求由方程所确定的隐函数的导数



解 此题在第二章第六节采用两边求导的方法做过,这里我们直接用公式求之.

令则



由原方程知时，所以



例14 求由方程所确定的隐函数的偏导数



解 设则且



利用隐函数求导公式，得



**三、知识小结**

小结本次课的主要内容（到此课程进行85分钟）

**四、课堂练习**

根据学生掌握情况临时选题（到此课程进行90分钟）

## 7.7.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题6-5：11；12；13；

## 7.55.5参考资料

1、高等数学第六版下册，同济大学数学系，高等教育出版社，2007.06 第83-88页

2、高等数学辅导，上海理工大学高等数学教研室，上海财经大学出版社，2005.10

第248-253页

3、高等数学解题方法与技巧，贺才兴，上海交通大学出版社，2011.01第324-328页

4、高等数学学习指导下册，方晓华，中国铁道出版社，2010.02第79-82页

5、高等数学辅导及习题精解（同济六版下册），张天德，延边大学出版社2014.06第68-71页

## 7.8教学单元八

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第8单元 | §6.6多元函数的极值及其求法 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.8.1教学目标

1、理解多元函数极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值；

2、会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解一些简单的应用问题；

3、了解多元函数条件极值的概念，会用拉格朗日乘数法求条件极值。

## 7.8.2教学内容（含重点、难点）

1、多元函数极值的概念及求法；

2、多元函数的最大值和最小值的求法，并解一些简单的应用问题；

3、多元函数条件极值的概念及用拉格朗日乘数法求条件极值。

【重点】极值和条件极值的概念，极值存在的必要条件和求极值、最值方法在实际问题中的应用；

【难点】极值的概念、拉格朗日乘数法、求极值、最值方法在实际问题中的应用。

## 7.8.3教学过程

**一、二元函数极值的概念**

**（1）二元函数的极值**

本课程的开始首先让同学们回顾一元函数的极值概念及求法，类似地给出二元函数极值的定义，定义１，PPT展示。

定义1 设函数在点的某一邻域内有定义, 对于该邻域内异于的任意一点, 如果



则称函数在有极大值；如果



则称函数在有极小值; 极大值、极小值统称为极值. 使函数取得极值的点称为极值点.



给出具体的二元函数例子，让同学们通过图形直观观察取得的极大值与极小值点（见例1-3）。

直观分析例题中极值的特征，回顾一元函数极值存在的必要条件，类比导出二元函数极值存在的必要条件（定理1）。并与一元函数可疑极值点类比，导出二元函数的可疑极值点，给出函数的驻点概念。

直观分析驻点不一定是极值点，导出极值存在的充分条件（定理2），证明略。

定理1 (必要条件) 设函数在点具有偏导数, 且在点处有极值, 则它在该点的偏导数必然为零，即



(6.1)



与一元函数的情形类似，对于多元函数，凡是能使一阶偏导数同时为零的点称为函数的驻点.

定理2 (充分条件) 设函数在点的某邻域内有直到二阶的连续偏导数，又令



(1) 当时，函数在处有极值，



且当时有极小值；时有极大值；



(2) 当时，函数在处没有极值;



(3) 当时，函数在处可能有极值，也可能没有极值.



由定理1与定理2，如果函数具有二阶连续偏导数，则求极值的一般步骤为？教师提出问题，请同学们思考，并给出求的极值的一般步骤：



第一步 解方程组 求出的所有驻点；



第二步 求出函数的二阶偏导数，依次确定各驻点处A、B、C的值，并根据的符号判定驻点是否为极值点，最后求出函数在极值点处的极值。



例题选讲：利用求二元函数极值的一般步骤，求一函数的极值。（到此课程大概进行35分钟）

例1 函数在点(0, 0)处有极小值. 从几何上看，表示一开口向上的椭圆抛物面，点是它的顶点.（图7-6-1）.



例2 函数在点(0,0)处有极大值. 从几何上看，



表示一开口向下的半圆锥面，点是它的顶点.（图7-6-2）.



例3 函数 在点(0,0)处无极值. 从几何上看，它表示双曲抛物面（马



鞍面）（图7-6-3）

例4 求函数的极值.



解 先解方程组解得驻点为



再求出二阶偏导数



在点 (1, 0) 处, 又



故函数在该点处有极小值



在点 (1, 2) 处, 处，故函数在这两点处没有极值;



在点处，又故函数在该点处有极大值



**（2）二元函数的最值**

与一元函数类似，我们可以利用函数的极值来求函数的最大值与最小值。教师提出问题，请同学们思考，并给出求最值的一般步骤。例题选讲：利用求最值的一般步骤，求一二元函数在某闭区域上的最大和最小值。（到此课程大概进行50分钟）

例6 求函数在矩形域



上的最大值和最小值.

解 先求函数在内驻点.由求得在内部的唯一驻点 (1, 1),且其次求函数在的边界上的最大值和最小值.



如图所示.区域的边界包含四条直线段



在上这是的单调增加函数,故在上的最大值为最小值为



同样在和上也是单调的一元函数,易得最大值、最小值分别为



(在上),



(在上),



而在上易求出在上的最大值最小值



将在驻点上的值与上的最大值和最小值比较,最后得到 在上的最大值最小值



例7 求二元函数在直线, 轴和轴所围成的闭区域上的最大值与最小值.



解 先求函数在内的驻点，解方程组



得唯一驻点且再求在边界上得最值，



在边界上，即于是



由得



而所以为最大值，为最小值.



例8 求函数 在区域上的最小值.



解 先求在内的极值.由



解方程组得驻点(0, 0), (2, 0). 由于



所以, 在点 (0, 0) 处故在 (0, 0) 处有极小值



在点 (2, 0) 处故函数在点 (2, 0)处无极值.



再求在边界上的最小值.由于点在圆周上变化,故可解出代入中，有



这时是的一元函数, 求得在上的最小值



最后比较可得, 函数在闭区间上的最小值



**二、条件极值 拉格朗日乘数法**

分析二元函数的极值概念，引出条件极值的概念，并介绍求条件极值的方法——拉格朗日乘数法。

问题：在所给条件下，求目标函数的极值。经过分析推导，我们通过引入拉格朗日函数 ，它将有约束条件的极值问题化为普通的无条件的极值问题。通过解方程，得，然后再研究相应的点是否真是问题的极值点。这种方法，称为拉格朗日乘数法。



前面所讨论的极值问题，对于函数的自变量一般只要求落在定义域内，并无其它限制条件，这类极值我们称为**无条件极值**. 但在实际问题中，常会遇到对函数的自变量还有附加条件的的极值问题. 对自变量有附加条件的极值称为**条件极值**.

拉格朗日乘数法

设二元函数和在区域内有一阶连续偏导数，则求在内满足条件的极值问题，可以转化为求拉格朗日函数



（其中为某一常数）的无条件极值问题.



于是，求函数在条件的极值的拉格朗日乘数法的基本步骤为：



(1) 构造拉格朗日函数



其中为某一常数;



(2) 由方程组



解出, 其中x, y就是所求条件极值的可能的极值点.



注：拉格朗日乘数法只给出函数取极值的必要条件, 因此按照这种方法求出来的点是否为极值点, 还需要加以讨论. 不过在实际问题中, 往往可以根据问题本身的性质来判定所求的点是不是极值点.

拉格朗日乘数法可推广到自变量多于两个而条件多于一个的情形:

例题选讲：教师讲解，如何将几何问题转化为目标函数在约束条件下的极值问题，进而采取拉格朗日乘数法求解。

例题选讲：请同学们思考，如何将实际问题转化为目标函数在约束条件下的极值问题，进而采取拉格朗日乘数法求解。并请一位同学回答，教师给出评价作为学生的一次课堂成绩记入学生登分册。（到此课程大概进行85分钟）

例9 求表面积为而体积为最大的长方体的体积.



解 设长方体的三棱长为则问题就是在条件



(1)



下, 求函数的最大值.



作拉格朗日函数



由



代入 (1) 式,得唯一可能的极值点:由问题本身意义知,此点就是所求最大值点.即,表面积为的长方体中,以棱长为的正方体的体积为最大,最大体积



**\*三、数学建模举例（课后自学）**

**（1）线性回归问题**

**（2）线性规划问题**

**四、知识小结**

小结本次课的主要内容

**五、课堂练习**

根据学生掌握情况临时选题（到此课程大概进行90分钟）

## 7.8.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题6-6:2；3；5；7；8

## 7.8.5参考资料

1、高等数学第六版下册，同济大学数学系，高等教育出版社，2007.06 第109-118页

2、高等数学辅导，上海理工大学高等数学教研室，上海财经大学出版社，2005.10

第263-270

3、高等数学解题方法与技巧，贺才兴，上海交通大学出版社，2011.01第338-343页

4、高等数学学习指导下册，方晓华，中国铁道出版社，2010.02第91-96页

5、高等数学辅导及习题精解（同济六版下册），张天德，延边大学出版社2014.06第83-92页

## 7.9教学单元九

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第9单元 | 多元函数微分学小结习题课 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.9.1教学目标

1、复习多元函数微分学的主要知识点，让学生理解重难点；

2、通过处理习题，让学生掌握多元函数微分的基本概念，基本公式及计算技巧。

## 7.9.2教学内容

1、复习多元函数微分学的主要知识

2、处理习题中的部分题目

## 7.9.3教学过程

**一、复习多元函数微分学的主要知识点**

本课程的开始与学生一起回顾本章的主要内容，结合PPT展示，抽5名学生回答，教师给出评价作为学生的一次课堂成绩记入学生登分册。涉及的内容有：

1、多元函数的概念，二元函数的极限，二元函数的连续性，有界闭域上连续函数的性质；

2、偏导数的概念与计算，高阶偏导数；

3、多元函数全微分的概念，全微分存在的必要条件和充分条件；多元函数的复合函数微分法，全微分形式不变性；

4、多元函数的隐函数微分法；多元函数微分法在几何上的应用；方向导数的概念与计算，梯度的概念与计算；

5、多元函数的极值及其求法，多元函数极值的必要条件，二元函数极值的充分条件，多元函数条件极值的概念及其求法（拉格朗日乘数法），多元函数的最大值、最小值及其简单应用。（到此课程大概进行25分钟）

**二、例题选讲与习题讲解**

例题选讲：选择总习题的5，12，18题讲解，进一步理解多元函数的复合函数求导法，偏导数，连续，可微之间的关系，隐函数的求导。（到此课程大概进行55分钟）

根据情况选择总习题九的部分习题，抽3-4名学生在黑板上演算，教师给出评价作为本组学生的一次课堂成绩记入学生登分册。（到此课程大概进行90分钟）

## 7.9.4作业安排及课后反思

【课后作业】总习题六：5，14；17；21

## 7.9.5参考资料

1、高等数学第六版下册，同济大学数学系，高等教育出版社，2007.06 第52-131页

2、高等数学辅导，上海理工大学高等数学教研室，上海财经大学出版社，2005.10

第228-270页

## 7.10教学单元十

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第10单元 | §6.7二重积分的概念和性质 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.10.1教学目标

1、理解二重积分的概念与性质；

2、熟悉二重积分的几何、物理背景；

3、熟悉二重积分的性质。

## 7.10.2教学内容（含重点、难点）

1、二重积分的概念与性质；

2、二重积分的几何、物理背景；

3、二重积分的性质。

【重点】二重积分的定义。

【难点】二重积分的几个性质定理。

## 7.10.3教学过程

**一、二重积分的概念**

先回顾积分微元法。再引入

**1. 曲顶柱体的体积**

设有一立体, 它的底是*xOy*面上的闭区域D, 它的侧面是以D的边界曲线为准线而母线平行于z轴的柱面 它的顶是曲面zf(x y) 这里f(x y)0且在D上连续 这种立体叫做曲顶柱体。

现在我们来讨论如何计算曲顶柱体的体积。

首先, 用一组曲线网把D分成*n*个小区域

Δ*σ* 1, Δ*σ* 2, ⋅ ⋅ ⋅ , Δ*σ**n*.

分别以这些小闭区域的边界曲线为准线，作母线平行于*z*轴的柱面，这些柱面把原来的曲顶柱体分为*n*个细曲顶柱体。

在每个Δ*σ**i*中任取一点(*ξ**i*, *η**i*), 以*f* (*ξ* *i*, *η**i*)为高而底为Δ*σ**i*的平顶柱体的体积为

*f* (*ξ**i*, *η**i*) Δ*σi* (*i*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅ , *n* ).

这个平顶柱体体积之和

.



可以认为是整个曲顶柱体体积的近似值。为求得曲顶柱体体积的精确值, 将分割加密, 只需取极限, 即

. 其中*λ*是个小区域的直径中的最大值。



**2. 平面薄片的质量**

设有一平面薄片占有*xOy*面上的闭区域D，它在点(*x*, *y*)处的面密度为

*ρ*(*x*, *y*), 这里*ρ*(*x*, *y*)>0且在*D*上连续. 现在要计算该薄片的质量M。

用一组曲线网把*D*分成*n*个小区域 Δ*σ* 1, Δ*σ* 2, ⋅ ⋅ ⋅ , Δ*σ**n*.

把各小块的质量近似地看作均匀薄片的质量: *ρ*(*ξ* *i*, *η**i*)Δ*σ**i* .

各小块质量的和作为平面薄片的质量的近似值: .



将分割加细, 取极限, 得到平面薄片的质量

.



其中*λ*是个小区域的直径中的最大值.

**定义** 设*f*(*x*, *y*)是有界闭区域D上的有界函数. 将闭区域D任意分成*n*个小闭区域

Δ*σ* 1, Δ*σ* 2, ⋅ ⋅ ⋅ , Δ*σ**n*.

其中Δ*σ**i*表示第*i*个小区域, 也表示它的面积. 在每个Δ*σ**i*上任取一点(*ξ**i*, *ηi*), 作和

. 如果当各小闭区域的直径中的最大值*λ*趋于零时, 这和的极限总存在, 则称此极限为函数*f*(*x*, *y*)在闭区域*D*上的二重积分, 记作, 即



.



*f*(*x*, *y*)被积函数, *f*(*x*, *y*)*dσ* 被积表达式，*dσ* 面积元素, *x*, *y*积分变量, D积分区域。

**二、二重积分的定义说明**

1、直角坐标系中的面积元素:

如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分D, 那么除了包含边界点的一些小闭区域外, 其余的小闭区域都是矩形闭区域。设矩形闭区域Δ*σi*的边长为Δ*xi*和Δ*yi*, 则Δ*σi*=Δ*xi*Δ*yi*, 因此在直角坐标系中, 有时也把面积元素*dσ* 记作*dxdy*, 而把二重积分记作



其中*dxdy*叫做直角坐标系中的面积元素.

2、二重积分的存在性: 当*f*(*x*, *y*)在闭区域*D*上连续时, 积分和的极限是存在的 也就是说函数*f*(*x*, *y*)在*D*上的二重积分必定存在. 我们总假定函数*f*(*x*, *y*)在闭区域*D*上连续, 所以*f*(*x*, *y*)在*D*上的二重积分都是存在的.

二重积分的几何意义: 如果*f*(*x*, *y*)≥0, 被积函数*f*(*x*, *y*)可解释为曲顶柱体的在点(*x*, *y*)处的竖坐标, 所以二重积分的几何意义就是柱体的体积. 如果*f*(*x*, *y*)是负的, 柱体就在*xOy* 面的下方, 二重积分的绝对值仍等于柱体的体积, 但二重积分的值是负的。

到此处大约45分钟。

**三、二重积分的性质**

1、对照着一元函数积分的性质。

引入二重积分的线性性质，积分区域可加性以及性质4比较定理，这部分讲解以二重积分的几何意义画图为辅。并举3个例题（到此课程大约进行65分钟）

1. 以二重积分的几何意义画图为辅讲解性质5估值定理和性质6中值定理，

意义清楚后举4个例题（到此课程大约进行85分钟）

例1 不作计算，估计的值，其中是椭圆闭区域：



.



解 区域D的面积在上



由性质 6 知



例2 估计二重积分的值, 其中积分区域为矩形闭区域.



解 积分区域面积



在上的最大值最小值



故



例3判断 的符号.



解 当时，



故



又当时，



于是



例4 积分有怎样的符号, 其中



解



<0.



例5 比较积分与的大小，其中区域D是三角形闭区域，三顶点各为(1,0),(1,1),(2,0).



解 三角形斜边方程在内有



故



于是 因此



**四、知识小结**

复述总结概念性质（到此课程进行到90分钟）

## 7.10.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题6-7：4，5，6

## 7.10.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．99-103.

## 7.11教学单元十一

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第11单元 | §6.8在直角坐标系下二重积分的计算（1） |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.11.1教学目标

1、熟练掌握在直角坐标系下计算二重积分；

2、理解积分区域的划分。

## 7.11.2教学内容（含重点、难点）

1. 利用直角坐标计算二重积分；
2. 画出积分区域，辨别X-积分区域与Y-积分区域；
3. 熟练掌握交换积分次序，确定积分限的方法与步骤。

【重点】辨别X-积分区域与Y-积分区域。

【难点】确定积分限，正确积分。

## 7.11.3教学过程

1. **二重积分计算思想**

将二重积分化为两次定积分计算。

1. X-积分区域与Y-积分区域

画图给出这两种区域的典型图例，引出概念。讲解两种积分区域化为二次积分的方法，并通过几个不同积分区域进一步深刻印象。（到此课程大约进行25分钟）

区域分类

型区域：. 其中函数在区间上连续. 这种区域的特点是：穿过区域且平行于y轴的直线与区域的边界相交不多于两个交点.



型区域：. 其中函数在区间上连续. 这种区域的特点是：穿过区域且平行于轴的直线与区域的边界相交不多于两个交点.



二重积分的计算

假定积分区域为如下型区域:



.



则有 (8.2)



类似地，如果积分区域为型区域：



.



则有

(8.3)



特别地，当区域为矩形区域时，有



1. 实际举例计算二重积分，先举二个可以两种区域都可做的例子，再举四个必须自己选择判断区域的例子。（到此课程大约进行60分钟）

例1计算其中D是由直线及所围成的闭区域.



解一 如图，将积分区域视为型,



解二 将积分区域视为型,



例2 计算, 其中是由直线和所围成的闭区域.



解 如图,既是型,又是型.若视为型,则



原积分



若视为型，则



其中关于的积分计算比较麻烦，故合理选择积分次序对重积分的计算非常重要.



例3（E02））计算二重积分其中D是由抛物线及直线所围成的闭区域.



解 如图,既是型，也是型.但易见选择前者计算较麻烦，需将积分区域划分为两部分来计算，故选择后者.



例4（E03）计算 其中D由及y轴所围.



解 画出区域的图形.将表成型区域,得



因的原函数不能用初等函数表示.所以我们要变换积分次序. 将表成型区域,得



例5（E04）计算其中D为.



解



例6 计算二重积分 其中区域是由, 所围成的矩形.



解 如图，因为是矩形区域,且所以



**二、交换积分次序**

这部分内容对学生灵活掌握积分限非常重要，引导同学首先根据所给信息正确画出直角坐标系下的积分区域图，从而根据题目要求改变积分次序，并举例说明。（到此课程大约进行到85分钟）

例7 交换二次积分的积分次序.



解 题设二次积分的积分限: 可改写为:



所以



例8交换二次积分的积分次序.



解 题设二次积分的积分限: 可改写为:



所以



例9 证明



其中a、b均为常数, 且.



证 等式左端二次积分的积分限:可改写为



所以



例10 交换二次积分



的积分次序.

解 题设二次积分的积分限:



可改写为



所以 原式



**三、知识小结**

和学生一起总结在直角坐标系下计算二重积分的步骤及怎样确定积分上下限。（到此课程大约进行到90分钟）

## 7.11.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题6-8：1（1），（4）；2（1）；3（2），（4）

【课后思考】 是不是所有的二重积分都能用直角坐标系计算？能否举个在直角坐标系下不能计算的例子？

## 7.11.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．103-108．

## 7.12教学单元十二

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第12单元 | §6.9在直角坐标系下二重积分的计算（2） |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.12.1教学目标

1、让学生掌握利用对称性和奇偶性化简二重积分；

2、熟练二重积分的计算并计算曲面所围立体体积。

## 7.12.2教学内容（含重点、难点）

1、利用对称性和奇偶性化简二重积分。

【重点】积分区域的对称性和被积函数的奇偶性。

【难点】不能滥用对称性计算二重积分。

2、计算曲面所围立体体积。

## 7.12.3教学过程

**一、积分区域的对称性和被积函数的奇偶性**

**（1）复习**

复习直角坐标系下计算二重积分的方法，举二个例子让学生计算，特别强调121页例4被积函数有绝对值的，记录平时成绩。（到此课程大概进行到15分钟）

**（2）积分区域的对称性和被积函数的奇偶性**

通过一个计算复杂的具体实例分析，怎样简化计算过程，引入积分区域的对称性和被积函数的奇偶性，总结出性质并用二重积分几何意义说明必须同时兼顾二者否则计算错误。（到此课程大概进行到45分钟）

利用被积函数的奇偶性及积分区域D的对称性，常会大大化简二重积分的计算. 在例5中我们就应用了对称性来解决所给的问题. 如同在处理关于原点对称的区间上的奇（偶）函数的定积分一样，在利用这一方法时，要同时兼顾到被积函数的奇偶性和积分区域D的对称性两方面. 为应用方便，我们总结如下：



1. 如果积分区域D关于y轴对称，则

(1) 当时，有



.



(2) 当时，有



其中



2．如果积分区域D关于x轴对称，则

(1) 当时，有



.



(2) 当时，有



其中



注：进一步，我们还可给出积分区域D关于原点对称和关于直线对称的情况（见光盘）.



举二个利用对称性计算简化的例子和一个不能用对称性的例子进一步加深学习；学生初步掌握后再举一个被积函数含有抽象函数用对称性计算简化的例子。（到此课程大概进行到70分钟）

例14 计算其中积分区域由曲线与所围成.



解 令因为关于轴对称,且



故



例15 计算 其中



解法一 先对积分,积分区域



故



解法二 先对积分，积分区域



故



解法三 利用对称性,



因为积分域关于轴对称，且函数关于是奇函数,所以



又 故



例16 计算 其中区域



解 因为关于轴和轴对称，且关于或关于为偶函数



注: 若直接在上求二重积分，则要繁琐很多.



例17 证明不等式 其中



证 因为关于对称，所以，故



又由于及而的面积为 1. 由二重积分性质,有



1. **计算曲面所围立体体积**

举例书上122页例子5说明计算曲面所围立体体积。（到此课程大概进行到85分钟）

**三、知识小结**

引导学生一起总结，怎样利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算。（到此课程大概进行到90分钟）

## 7.12.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题6-8：4，10，11

【课后思考】是不是所有的二重积分都能用直角坐标系计算？在直角坐标系下计算二重积分有那些注意事项？

## 7.12.5参考资料

1. 同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．
2. 2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．

## 7.13教学单元十三

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第13单元 | §6.9在极坐标第下二重积分的计算 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.13.1教学目标

1、熟练掌握在极坐标系下计算二重积分；

2、理解积分区域的划分。

## 7.13.2教学内容（含重点、难点）

在极坐标系下计算二重积分；

2、根据题目选择适当的坐标系积分计算。

【重点】直角坐标系转化为极坐标系的二重积分计算公式。

【难点】根据积分区域判断θ，的取值范围。



## 7.13.3教学过程

**一、极坐标系，直角坐标系转化为极坐标系的二重积分计算公式**

1、举一个实际例子发现在直角坐标系下无法计算二重积分，那么根据积分区域的特点引入极坐标系，讲解极坐标系的相关知识以及怎样进行极坐标和直角坐标的转化。（到此课程大概进行到20分钟）

2、根据微元法得到极坐标系下的面积微元，推导直角坐标系转化为极坐标系的二重积分计算公式。

3、分几种情况讨论如何由积分区域判断θ，的取值范围。（到此课程大概进行到45分钟）



**二、极坐标系下计算二重积分**

通过具体实例来说明在极坐标系下计算二重积分，可举三个例子。再出二道课堂联系题提问学生做，计入平时成绩。（到此课程大概进行到85分钟）

根据微元法可得到极坐标系下的面积微元



注意到直角坐标与极坐标之间的转换关系为



从而就得到在直角坐标系与极坐标系下二重积分转换公式为

(9.1)



二重积分的计算

1．如果积分区域介于两条射线之间，而对内任一点，其极径总是介于曲线之间（图6-9-2），则区域的积分限



于是



(9.2)



具体计算时，内层积分的上、下限可按如下方式确定：从极点出发在区间上任意作一条极角为的射线穿透区域（图6-9-2），则进入点与穿出点的极径就分别为内层积分的下限与上限.



2．如果积分区域是如图6-9-3所示的曲边扇形，则可以把它看作是第一种情形中当的特例，此时，区域的积分限



于是

(9.3)



3．如果积分区域如图6-9-4所示，极点位于的内部，则可以把它看作是第二种情形中当的特例，此时，区域的积分限



于是

(9.4)



注：根据二重积分的性质3，闭区域的面积在极坐标系下可表示为



(9.5)



如果区域如图6-9-3所示，则有



(9.6)



例1 计算，其中D是由所确定的圆域.



解 如图，区域在极坐标下可表示为



故



例2 计算, 其中积分区域是由所确



定的圆环域.

解 由对称性，可只考虑第一象限部分,



注意到被积函数也有对称性,则有



例3 计算, 其中D是由曲线所围成的平面区域.



解 积分区域是以点(1,0)为圆心，以1为半径的圆域，如图.其边界曲线的极坐标方程为 于是区域的积分限为



所以



例4 写出在极坐标系下二重积分的二次积分，其中区域



解 利用极坐标变换易见直线方程的极坐标形式为



故积分区域的积分限为



所以



例5 计算,其中为由圆及直线, 所围成的平面闭区域.



解



所以



例6 将二重积分化为极坐标形式的二次积分,其中是曲线 及直线所围成上半平面的区域.



解 如图，令则的边界的极坐标方程分别变为及



例7 求曲线和所围成区域的面积.



解 根据对称性有在极坐标系下



由得交点



故所求面积



例8 求球体被圆柱面所截得的(含在圆柱面内的部分)立体的体积（图6-9-9）.



解 如图，由对称性，有



其中为半圆周及轴所围成的闭区域.



在极坐标中，积分区域



**三、知识小结**

和学生一起总结，二重积分计算有几种方法，各自什么特点。（到此课程大概进行到90分钟）

## 7.13.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题6-9：3（1），（3）；4（2），（4）

【课后思考】 可否对任一二重积分计算选择正确积分方法并快速计算，如何做到这点？

## 7.13.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．109-113．

## 7.14教学单元十四

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第14单元 | §7.1常数项级数的概念和性质 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.14.1教学目标

1、掌握常数项级数及收敛的概念．

2、．掌握收敛级数的基本性质．

## 7.14.2教学内容（含重点、难点）

1、用定义来讨论数项级数的敛散性

2. 掌握收敛级数的基本性质

3. ．掌握几何级数收敛与发散的条件．

4. 知道调和级数发散

【重点】掌握级数收敛的性质与必要条件

【难点】掌握级数收敛的性质与必要条件

## 7.14.3教学过程

**一、常数项级数的概念**

**（1）首先用2个例题引入P209,然后给出定义**

**定义** 如果级数的部分和数列有极限S, 既 =S 则称无穷数列收敛，S是此级数的和，并记为 S==u+u+u+……+u+…．．

若没有极限，则称无穷级数发散．

当级数收敛时，其和与部分和的差 r=S-S=u+u+…．． 称为级数的余项．余项的绝对值，则为用近似值代替S所产生的误差．

**（2）例题**

例1 写出级数



的一般项.

解 分母是偶数的连乘积，而且第一项为偶数，第二项是两个偶数之积，第三项是三个偶数之积，第项是个偶数之积，故可写成而分子为奇数，故第项为于是该级数的一般项为



例2 已知级数的前项的部分和 求这个级数.



解 因为所以



从而



故所求级数为



例3 讨论级数 的收敛性.



解



所以即题设级数收敛，其和为1



例4 证明级数 是发散的.



证 级数的部分和为显然，故题设级数发散.



例5 讨论等比级数(又称为几何级数)



的收敛性.

解 当有



若有则



若有则



若有



若则级数变为



易见不存在.综上所述,当时，等比级数收敛,且



**对于无穷等比级数要总结：**综合上述结果，我们有结论：如果等比级数的公比的绝对值<1，则级数收敛；若1,则级数发散．

几何级数或等比级数的结论非常重要，简单而实用，因此我们要熟记

**二、收敛级数的基本性质**

**性质1** 如果级数收敛于和S，则级数也收敛，且其和为KS．

**性质2** 如果级数与分别收敛于和S ,, 则级数也收敛，且其和为S．

**性质2** 也可说为：两个收敛级数也可以逐项相加减．

**性质3** 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性．

**性质 4：**如果级数收敛，则对这级数的项任意加括号后所形成的级数



仍收敛，且其和不变．

**性质 5 (级数收敛的必要条件)** 如果级数收敛，则它的一般项u趋于零，即 ．

**注** 级数的一般项趋于零并不是级数收敛的充分条件．有些级数虽然一般项趋于零，但仍然是发散的．

例6 把一个球从米高下落到地平面上. 球每次落下距离碰到地平面再跳起距离，其中是小于1的正数. 求这个球上下的总距离（图12-1-1）.



解 总距离是 .



若，则总距离是（米）.



例7 把循环小数5.232323…表示成两个整数之比.

解



线性运算性质的应用

例8 求级数的和.



解 根据等比级数的结论,知



而由前例,知所以



例9 设级数收敛, 发散, 证明: 级数 发散.



证 用反证法,已知收敛,假定收敛,由与级数性质得知收敛,这与题设矛盾,所以级数发散.



例10 判别级数 是否收敛.



解 将所给级数每相邻两项加括号得到新级数



因为收敛，而级数发散，所以级数发散，根据性质3的推论1，去括号后的级数



也发散.



例11 证明调和级数 是发散的.



证 对题设级数按下列方式加括号



设所得新级数为则易见其每一项均大于从而当时，不趋于零.



由性质4知发散，再由性质3的推论1即知，调和级数发散.证毕.



最后再给出关于调和级数发散速度的一个注记.

当越来越大时，调和级数的项变得越来越小，然而，慢慢地－非常慢慢地－它的和将增大并超过任何有限值.调和级数的这种特性使一代又一代的数学家困惑并为之着迷。它的发散性是由法国学者尼古拉.奥雷姆(1323－1382)在极限概念被完全理解之前约400年首次证明的.



下面的数字将有助于我们更好地理解这个级数.

这个级数地前一千项相加约为7.485；前一百万项相加约为14.357；前十亿项相加约为21；前一万亿项相加约为28等等.更有学者估计过，为了使调和级数的和等于100，必须把项加起来.



**三、知识总结**

本节学习了

* 1. 常数级数收敛与发散的定义，它是借助于数列极限的定义而给出的．
  2. 收敛级数的基本性质，其中以级数收敛的必要条件最重要，并可作为判别级数发散的一种方法．

## 7.14.4作业安排及课后反思

**作业** 习题7-1 3：(1)，（2)，4：（1），（2），（3），（4），（5）

反思：数收敛的必要条件最重要，作为判别级数发散的一种方法．

【课后预习】：第2节 正项级数的判别法

## 7.14.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．第1章第1、2节 P1-33．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．第12章第1节

## 7.15教学单元十五

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第15单元 | §7.2正项项级判别法(1) |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.15教学目标

1．使学生掌握正项级数与交错级数的定义及正项级数收敛的充分必要条件；

2．掌握正项级数的比较审敛法，比值审敛法和根值审敛法；

## 7.15.2教学内容（含重点、难点）

1．正项级数的比较审敛法及其极限形式，并能以P-级数和几何级数为基本参照级数运用比较审敛法．

2．掌握正项级数的比值审敛法和根值审敛法．

【重点】掌握比较审敛法、比值审敛法、极值审敛法的应用

【难点】掌握比较审敛法、比值审敛法、极值审敛法的应用

## 7.15.3教学过程

**一、正项级数及其审敛法**

1．定义

2. **定理1** 正项级数收敛的充分必要条件是：它的部分和数列有界．

**定理2(比较审敛法)** 设和都是正项级数，且(n=1,2,…)．若级数收敛，则级数收敛；反之若级数发散，则级数发散．

**推论** 设和都是正项级数，如果级数收敛，且有k(k>0)成立，则级数收敛；若级数发散，且有k(k>0)成立，则级数****发散**．**

**定理3(比较审敛法的极限形式)**设和都是正项级数，

(1) 如果=(0)，且级数收敛，则级数收敛．

(2) 如果=>0或=，且级数发散，则级数发散

定理进行证明，加以下面的例题进行理解运用

例1 讨论级数的收敛性.



解 时，级数发散.



时，由图可见



即有界，级数收敛.



当时收敛



故级数 .



当时发散



**注** 比较审敛法的极限形式，给出一种判别正项级数收敛的重要方法，即寻找一个已知敛散性的级数作为参照级数，当和当时是同阶无穷小时，则级数与参照级数具有相同的敛散性．

如何寻找一个合适的参考级数呢？例1中的P—级数则是我们最理想的参考级数，由于P—级数的结论明确，简单，容易记，因此我们一定熟记其结论，并把它作为首选的参考级数，其应用方法可参阅例2、例3

例2证明级数是发散的.



证 而级数发散，



发散.



例3判别级数的收敛性.



解 运用比较判别法.因



而是收敛的,所以原级数收敛.



在极限形式的比较审敛法中，取参照级数为调和级数，或P—级数，则可得到在使用上较为方便的极限审敛法．

例4 判别级数的敛散性.



解 记



采用比较法的极限形式,取因



所以原级数与级数具有相同的敛散性,从而知



当时，级数收敛;



当时，级数发散.



例5 判别级数的敛散性.



解 选取级数作比较.



由可得



因级数收敛,所以原级数也收敛.



注: 从以上解答过程中可以看到极限中的某些等价无穷小在级数审敛讨论时十分有用的,事实上级数的收敛性取决于通项趋向于零的“快慢”程度.



**三、总结**

本节学习了比较审敛法和比较审敛法的极限形式.

## 7.15.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题7-2 1：(1)，（3)，

【课后思考与反思】如何恰当选择方法解题

【课后预习】第3节

## 7.15.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．第1章第1、2节 P1-33．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．第12章第1节

## 7.16教学单元十六

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第16单元 | §7.2正项项级判别法（二） |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.16教学目标

1．使学生掌握正项级数与交错级数的定义及正项级数收敛的充分必要条件；

2．掌握正项级数的比较审敛法，比值审敛法和根值审敛法；

## 7.16.2教学内容（含重点、难点）

1．正项级数的比较审敛法及其极限形式，并能以P-级数和几何级数为基本参照级数运用比较审敛法．

2．掌握正项级数的比值审敛法和根值审敛法．

【重点】掌握比较审敛法、比值审敛法、极值审敛法的应用

【难点】掌握比较审敛法、比值审敛法、极值审敛法的应用

## 7.16.3教学过程

**一、正项级数及其审敛法**

**定理4(极限审敛法)** 设为正项级数，

(1)如果(或)则级数发散．

(2)如果，且则级数收敛．

**例1** 判定级数的收敛性．

**例2**判定级数的收敛

**定理5 (比值审敛法，达朗贝尔 (D’Alembert) 判别法)**设为正项级数，如果,则当<1时级数收敛；当>1(或)时级数发散；当=1时级数敛散性不能确定．

**定理6(根值审敛法，柯西判别法)** 设为正项级数，如果  ,则当<1时级数收敛，当>1(或)时级数发散，当=1时级数敛散性不能确定．

**注** 比值审敛法与根值审敛法的结论相同，但应用范围有所区别．当正项级数u的一般项中含有阶乘项或有因式乘积时，往往采用比值审敛法，参阅例6例7；当正项级数的一般项u为型如[f(n)]的幂指函数时，应采用根值审敛法，可参阅例8．

另外当比值审敛法或根值审敛法中的=1时，这两种方法失效．这时应该选用p-级数作为参照级数，用比较审敛法来审敛其敛散性，可参阅例9．

例3 判别级数的敛散性.



解 选取级数作比较.



由可得



因级数收敛,所以原级数也收敛.



注: 从以上解答过程中可以看到极限中的某些等价无穷小在级数审敛讨论时十分有用的,事实上级数的收敛性取决于通项趋向于零的“快慢”程度.



根值判别法的应用

例4 判别级数的敛散性.



解 令由于



从而



由级数的收敛推知本题所给级数也收敛.



例5 级数 当时收敛, 有人说, 因为 故级数收敛. 你认为他的说法对吗?



解 不对.前者级数的是一常数与无关,而后者与有关,事实上



由级数的发散性,可知级数也发散.



例6 判别下列级数的收敛性：

(1) ； (2) .



解 故级数收敛.



故级数发散.



例7判别级数的敛散性.



解 因为而对于级数由比值判别法,因



所以级数收敛,从而原级数亦收敛.



例8判别级数的收敛性.



解 采用比较判别法,由于



所以当时，原级数收敛;当时，原级数发散;当时，比值法失效,但此时注意到:



数列严格单调增加,且



于是 即 故



由此得到所以当时原级数发散.



**注** (1) 利用比较审敛法或比较审敛法的极限形式时经常选用-级数作为参照级数，并得出正确的结论．

(2) 关于比较审敛法和根值审敛法的适用范围，一般有

当通项含有阶乘或乘积的因式时，一般采用比值审敛法；

当通项为型如的幂指函数时，一般采用根值审敛法．

(3) 判别任意项级数是否绝对收敛，实质上是判别正项级数的敛散性，故有正项级数的比值、根值，比较等各种审敛法从中适当选择．而判别交错级数的收敛性，通常采用莱布尼兹判别法．

(4) 用比值审敛法和根值审敛法的判别范围内判别的敛散性，能立即判定任意项级数的敛散性，即<1,级数收敛；>1，级数发散．

**三、总结**

本节学习了比值审敛法和根值审敛法，三种方法构成了判别正项级数敛散性的主要工具；

## 7.16.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题7-2 2：（1），（3），3：（1），（3），（5）

【课后思考与反思】如何恰当选择方法解题

【课后预习】第3节

## 7.16.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．第12章第1节

## 7.17教学单元十七

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第17单元 | §7.3一般常数项级数 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.17.1教学目标

1．掌握交错级数的莱布尼兹审敛法．

2．了解绝对收敛和条件收敛的概念，并了解绝对收敛级数的性质．

## 7.17.2教学内容（含重点、难点）

掌握莱布尼兹审敛法的应用，

【重点】掌握莱布尼兹审敛法的应用

【难点】掌握莱布尼兹审敛法的应用

## 7.17.3教学过程

**一、交错级数及其审敛法**

正负项相间的级数，称为交错级数，可以写成下面的形式

U=U-U+U-U+……

其中U>0 (n=1,2,……)

**定理1(莱布尼兹定理)** 如果交错级数满足条件：

(1) UU (n=1,2,3……)

(2) U=0

则级数收敛，且其和SU,其余项r的绝对值U

例如交错级数

=1-+-+……+(-1)+……

**二、绝对收敛与条件收敛**

如果任意项级数的各项绝对值所构成的正项级数收敛，则称级数绝对收敛；如果级数收敛，而级数发散，则称级数条件收敛．容易知道，级数是绝对收敛级数，而级数是条件收敛级数．

级数绝对收敛与级数条件收敛有以下重要关系：

**定理2 如果级数绝对收敛，则级数必定收敛**

定理2说明对于一般的级数，如果我们用正项级数的审敛法判定级数收敛，则此级数收敛．这就使得这一类级数的收敛性判定转化为正项级数的收敛性判定问题．

一般来说，如果级数发散，则不能断定级数也发散．但是若有=P>1或=P>1，则我们可判定级数必定发散．这是因为由P>1，可推知不趋于 0，从而不趋于 0(n),因此级数发散．

**例题**

例1 断级数的收敛性.



解 易见题设级数的一般项满足:



所以级数收敛,其和用近似产生的误差



注：判别交错级数（其中）的收敛性时，如果数列单调减少不容易判断，可通过验证当充分大时，来判断当充分大时数列的单调减少；如果直接求极限有困难，亦可通过求（假定它存在）来求.



例2 判断的收敛性.



解 由于所以是交错级数.令有



即时，是递减数列,又利用洛必达法



则有 则由莱布尼茨定理知该级数收敛.



例3 判别级数的收敛性.



解 由易见当时，题设级数绝对收敛;



当时，由莱布尼茨定理知收敛，但发散，故题设级数条件收敛.



例4 判别级数的收敛性.



解 而收敛,收敛,故由定理知原级数绝对收敛.



例5 判定级数的收敛性.



解 由有 而



可知因此所给级数发散.



例6 判别级数的收敛性.



解 这是一个交错级数,令考察级数是否绝对收敛,



采用比值审敛法:



所以原级数非绝对收敛.

由可知当充分大时,有故所以原级数发散.



例7 判别级数的收敛性.



解 因为



即且



由交错级数审敛法，原级数收敛.另一方面,而发散,



故发散.于是级数是条件收敛的.



**三．总结**

学习了

1.交错级数的莱布尼兹定理；

2.绝对收敛与条件收敛．

## 7.17.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题7-3 1：（1）（3）（5）（6）；

【课后思考与反思】如何恰当选择方法解题

【课后预习】第4节

## 7.17.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．第1章第1、2节 P1-33．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．第12章第1节

## 7.18教学单元十八

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第18单元 | §7.4幂级数 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.18.1教学目标

1、让学生了解什么是函数项级数、幂级数的相关概念；

2、理解幂级数的收敛性及其运算；

3、熟练掌握幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域以及和函数的求法。

## 7.18.2教学内容（含重点、难点）

1、函数项级数的一般概念，幂级数的及其收敛性以及运算；

2、收敛域、发散域，收敛半径、收敛区间，和函数；

【重点】幂级数收敛半径、收敛域，和函数求法。

【难点】幂级数的和函数的运算。

## 7.18.3教学过程

**一、前情回顾**

一般常数项级数的审敛法，交错级数——莱布尼茨定理，绝对收敛与条件收敛。请2至3名同学回答，教师评价记入登分册分册。（到此课程进行5分钟）

**二、新课讲授**

**（1）函数项级数的概念**

与常数项级数作对比，提出函数项级数的定义，部分和；函数项级数的收敛点，发散点，从而提出函数项级数的收敛域，发散域的概念。与常数项级数知识点平行，相应的得到函数项级数的和函数，余项的概念。举两个例子加深学生对概念的理解。（到此课程大概进行到25分钟）

**（2）幂级数及其收敛性**

函数项级数中最简单且最常见的一类级数就是幂级数，写出幂级数的两种形式，利用阿贝尔定理得出幂级数的收敛半径的概念以及求收敛半径的求法。通过例子讲述求幂级数收敛域的基本步骤。应用举例3至4道。（到此课程大概进行到60分钟）

根据幂级数的系数的形式，当幂级数的各项是依幂次连续的时候，可用对其系数应用比值判别法或根值判别法直接求出收敛半径，即有



或 ；



如果幂级数有缺项，如缺少奇数次幂的项等，则应将幂级数视为函数项级数并利用比值判别法或根值判别法其收敛域；

求幂级数收敛域的基本步骤：



(1) 求出收敛半径R.；

(2) 判别常数项级数 的收敛性；



(3) 写出幂级数的收敛域.

例1 几何级数



就是一个函数项级数，根据第一节例3的讨论知，当时，级数收敛；当时，级数发散. 因此，这个级数的收敛域是区间，发散域是.



在收敛域内，有



(4.3)



即级数的和函数为，这个结果在今后的许多问题中有重要应用.



例2 求级数的收敛域.



解 由比值判别法



(1)当 即或时,原级数绝对收敛.



(2)当 即时,原级数发散.



(3)当 或时,级数为收敛;时，级数为发散,故级数的收敛域为



例3 确定级数 的收敛域.



解 当时，级数为此级数收敛.



当时，记有



由比值判别法知,此时级数绝对收敛,故级数收敛. 因此,级数的收敛域为



例4 求下列幂级数的收敛域



解 所以收敛半径



当时，级数成为该级数收敛;当时，级数成为该级数发散.



从而所求收敛域为



(2) 因为故收敛半径即题设级数只在处收敛.



(3) 因为 所以收敛半径



所求收敛域为



(4) 令题设级数化为因为



所以收敛半径收敛区间为即



当时，级数成为该级数发散; 当时,级数成为该级数收敛.



从而所求收敛域为



例5 求幂级数的收敛域.



解 题设级数缺少偶数次幂，此时可直接利用比值判别法:



当即时，级数收敛;



当即时，级数发散,所以收敛半径



当时，级数成为该级数发散; 当时，级数成为该级数发散.



故所求收敛域为



例6 求函数项级数的收敛域.



解 令原级数变为容易求得级数的收敛域为即



解此不等式得所以原级数的收敛域为



**（3）幂级数的运算**

幂级数的加减法、乘法以及除法。重点学习幂级数的分析运算性质：1）连续；2）可导；3）可积。求幂级数和函数举例。（到此课程大概进行到85分钟）

例7 求幂级数的收敛域.



解 从例4的(1)知,级数的收敛域为对级数有



所以,其收敛半径为4.易见当时，该级数发散.因此级数的收敛域为



由幂级数的代数运算性质，题设级数的收敛域为



例8 求幂级数的和函数.



解 由例4(1)的结果知，题设级数的收敛域为设其和函数为即



显然且



由积分公式得



因题设级数在时收敛，所以



例9 求幂级数的和函数.



解 因为，故题设级数的收敛半径R=1，易见当时，题设级数发散，所以题设级数的收敛域为设则



在上式两端求导，得所求和函数



例10 求级数 的和.



解 所求级数的和是幂级数当时的和.设逐项求导,得两边积分,得



即



又因所以故所求原级数的和为



例11 求幂级数的和.



解 设则



将上式两端对积分,得



由得两端积分得



由得



即



**三、知识小结**

小结本次可的主要内容（到此课程大概进行到90分钟）

## 7.18.4作业安排及课后反思

【课后作业】1、习题7-4：1（1）（4）（7）,2（1），4（1），5

## 7.18.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第六版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．第12章第3节 第269-277页．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．第10章第3节P180-187．

## 7.19教学单元十九

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第19单元 | §7.5函展  开成幂级数 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.19.1教学目标

1、让学生了解泰勒级数的概念；

函数的泰勒展开式；函数的麦克劳林展开式；如果函数能在某个区间内展开成幂级数，则它必定在这个区间内的每一点处具有任意阶的导数. 即，没有任意阶导数的函数是不可能展开成幂级数的. 可证明，如果能展开成的幂级数，则这种展开式是唯一的，它一定等于的麦克劳林级数.



熟练掌握常见函数展开成麦克劳林级数，并能将一些简单的函数展开成泰勒级数。

函数展开成幂级数的方法：

直接法：直接将函数展成泰勒级数；

间接法：利用已知的函数展开式（七个基本函数的麦克劳林展开式），通过线性运算法则、变量代换、恒等变形、逐项求导或逐项积分等方法间接地求得幂级数的展开式. 这种方法我们称为函数展开成幂级数的间接法.

级数的主要应用之一是利用它来进行数值计算. 在函数的幂级数展开式中，取前面有限项，就可得到函数的近似公式，这对于计算复杂函数的函数值是非常方便的，可以把函数近似表为的多项式，而多项式的计算只需用到四则运算，非常简便.



利用直接法将函数展开成幂级数

例1 将函数展开成幂级数.



解 由得于是的麦克劳林级数为



该级数的收敛半径为对于任何有限的数、(介于0与之间)，有



因有限,而是级数的一般项，所以



即有于是



例2 将函数展成x的幂级数.



解



顺序循环地取于是的麦克劳林级数为



该级数的收敛半径为对于任何有限的数、介于0与之间)，有



有



于是



例3 将函数展成x的幂级数.



解 利用幂级数的运算性质,由的展开式



逐项求导得



例4 将函数展成x的幂级数.



解 因为而



在上式两端从 0 到逐项积分,得



上式对也成立.因为上式右端的幂级数当时收敛，而上式左端的函数在



处有定义且连续.



例5 将函数展开成x的幂级数.



解



…



…



所以……



于是的麦克劳林级数为



该级数相邻两项的系数之比的绝对值



因此，该级数的收敛半径收域区间为



设级数(1)的和函数为则可求得



即 (2)



在区间的端点处，展开式(2)是否成立要看的取值而定.



可证明:当时，收敛域为当时，收敛域为当时，收敛



域为公式(2)称为二项展开式.



特别地,当为正整数时，级数成为的次多项式，它就是初等代数中的二项式定理.



例如，对应、的二项展开式分别为



例6 将函数展开成的幂级数.



解



利用间接法将函数展开成幂级数

例7 将函数展开成x的幂级数.



解



当时，级数收敛;当时，级数收敛.且当时，函数连续，所以



例8 将函数展开成x的幂级数.



解 由于



且所以



例9 将函数 展开成x的幂级数.



解



例10 将函数 展开成的幂级数.



解



而



所以



例11 将函数展开成的幂级数.



解 因为



逐项求导,得



所以



例12 将函数展开成的幂级数.



解



而



故



## 7.19.2教学内容（含重点、难点）

1、泰勒级数的概念；

2、函数展开成幂级数的方法：直接法，间接法。

【重点】函数展开成幂级数的方法。

【难点】函数展开成幂级数。

## 7.19.3教学过程

**一、前情回顾**

简要回顾上一节中，幂级数的收敛半径、收敛域以及和函数的求法。并提问幂级数的分析运算性质。抽2名同学回答，并将教师评价记录平时成绩记分册。（到此课程大概进行到5分钟）

**二、新课讲解**

**（1）泰勒级数的概念**

由上册的泰勒公式联想一个函数在某一点的领域内如果有任意阶导数，可将函数在某一点的泰勒公式一直展开下去，从而得到函数展开成泰勒级数的充要条件，平行推出函数展开成麦克劳林级数的条件。（到此课程大概进行到25分钟）

**（2）函数展开成幂级数的方法**

【1】 直接法

将函数当展开成泰勒级数的几个步骤：



1、计算出，；



2、写出对应的泰勒级数，并求出该级数的收敛区间；



3、验证在内，；



4、写出所求函数的泰勒级数及其收敛区间，。



举例几个常见基本初等函数的麦克劳林级数。（到此课程大概进行到60分钟）

【2】间接法

一般情况下，只有少数见到的函数其幂级数展开式能利用直接法得到它的麦克劳林展开式，更多的是利用已知函数的展开式，通过线性运算法则、变量替换、恒等变形、逐项求导或逐项求积分等方法简介地求幂级数的展开式。实质上幂级数的展开是求幂级数和函数的逆过程。举例说明

（到此课程大概进行到85分钟）

**三、知识小结**

和学生一起总结，回顾本节的各个知识点，强调函数展开成幂级数的主要方法，并如何利用基本函数的幂级数展开间接展开函数成幂级数。（到此课程大概进行到90分钟）

## 7.19.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题7-5：1（1），（4）；3；7

【课后思考】 如果函数能展开成的幂级数，则这个幂级数是的麦克劳林级数。反过来，如果的麦克劳林级数在的某领域内收敛，它是否一定收敛于？



## 7.19.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第六版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．第12章第3节 P278-285．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．第10章第4节P187-193．

## 7.20教学单元二十

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第20单元 | §8.1微分方程的基本概念 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.20.1教学目标

1、让学生了解微分方程的概念；

2、掌握微分方程的阶、通解、特解、初值条件等概念。

## 7.20.2教学内容（含重点、难点）

1、微分方程的概念；

2、微分方程的具体例子。

【重点】微分方程的概念。

【难点】微分方程的通解特解的理解。

## 7.20.3教学过程

**一、微分方程的概念**

我们把未知函数为一元函数的微分方程称为**常微分方程**. 类似地，未知函数为多元函数的微分方程称为**偏微分方程**，

本章我们只讨论常微分方程. 常微分方程的一般形式是:

(1.1)



其中为自变量，是未知函数.



如果能从方程(1.1)中解出最高阶导数，就得到微分方程

(1.2)



以后我们讨论的微分方程组主要是形如(1.2)的微分方程，并且假设(1.2)式右端的函数在所讨论的范围内连续.



如果方程(1.2)可表为如下形式:

(1.3)



则称方程(1.3)为**阶线性微分方程**. 其中 和均为自变量的已知函数.



不能表示成形如(1.3)式的微分方程，统称为**非线性方程**.

在研究实际问题时，首先要建立属于该问题的微分方程，然后找出满足该微分方程的函数（即解微分方程），就是说，把这个函数代入微分方程能使方程称为恒等式，我们称这个函数为该**微分方程的解**. 更确切地说，设函数在区间上有阶连续导数，如果在区间上，有



则称函数为微分方程(1.1)在区间上的解.



**二、微分方程的解**

微分方程的解可能含有也可能不含有任意常数. 一般地，微分方程的不含有任意常数的解称为微分方程的**特解**. 含有相互独立的任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相等的解称为微分方程的**通解**（**一般解**）. 所谓通解的意思是指，当其中的任意常数取遍所有实数时，就可以得到微分方程的所有解（至多有个别例外）.

**注**：这里所说的相互独立的任意常数，是指它们不能通过合并而使得通解中的任意常数的个数减少.

许多实际问题都要求寻找满足某些附加条件的解，此时，这类附加条件就可以用来确定通解中的任意常数，这类附加条件称为**初始条件**，也称为**定解条件**. 例如(略)

带有初始条件的微分方程称为微分方程的**初值问题**.

微分方程的解的图形是一条曲线，称为微分方程的**积分曲线**.

**例题选讲**

**微分方程的概念**

**例1** 设一物体的温度为100℃，将其放置在空气温度为20℃的环境中冷却. 根据冷却定律：物体温度的变化率与物体和当时空气温度之差成正比，设物体的温度与时间的函数关系为，则可建立起函数满足的微分方程



其中为比例常数. 这就是**物体冷却的数学模型**.



根据题意，还需满足条件



**例2** 设一质量为的物体只受重力的作用由静止开始自由垂直降落. 根据牛顿第二定律：物体所受的力等于物体的质量与物体运动的加速度成正比，即，若取物体降落的铅垂线为轴，其正向朝下，物体下落的起点为原点，并设开始下落的时间是，物体下落的距离与时间的函数关系为，则可建立起函数满足的微分方程



其中为重力加速度常数. 这就是**自由落体运动的数学模型**.



根据题意，还需满足条件



**例3** 如果设某商品在时刻*t*的售价为*P*, 社会对该商品的需求量和供给量分别是*P*的函数 则在时刻*t*的价格对于时间*t*的变化率可认为与该商品在同时刻的超额需求量成正比, 即有微分方程



在和确定情况下, 可解出价格与t的函数关系，这就是**商品的价格调整模型**.



**例4** 试指出下列方程是什么方程，并指出微分方程的阶数.



**解** (1)是一阶线性微分方程，因方程中含有的和都是一次.



(2)是一阶非线性微分方程，因方程中含有的的平方项.



(3)是二阶非线性微分方程，因方程中含有的的三次方.



(4)是二阶非线性微分方程，因方程中含有非线性函数和



例5 求曲线族满足的微分方程，其中为任意常数.



解 求曲线族所满足的方程，就是求一微分方程,使所给的曲线族正好是该微分方程的积分曲线族.因此所求的微分方程的阶数应与已知曲线族中的任意常数的个数相等.这里, 我们通过消去任意常数的方法来得到所求的微分方程.在等式两端对求导,得



再从解出代入上式得



化简即得到所求的微分方程



例6 验证函数(C为任意常数)是方程



的通解, 并求满足初始条件的特解.



解 要验证一个函数是否是方程的通解，只要将函数代入方程，看是否恒等，再看函数式中所含的独立的任意常数的个数是否与方程的阶数相同.将求一阶导数,得



把和代入方程左边得



因方程两边恒等,且中含有一个任意常数,故是题设方程的通解.



将初始条件代入通解中，



得



从而所求特解为



## 7.20.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题7-1：1；2；3；5

【课后反思】体会微分方程通解与特解

【课后思考】学习微分方程的目的是什么

【课后预习】可分离变量的微分方程

## 7.20.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．

## 7.21教学单元二十一

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第21单元 | §8.2可分离变量的微分方程 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.21.1教学目标

1、让学生理解可分离变量方程及齐次方程的概念；

2、掌握可分离变量方程及齐次方程的解法。

## 7.21.2教学内容（含重点、难点）

1、可分离变量方程及齐次方程的概念；

2、可分离变量方程及齐次方程的解法。

【重点】可分离变量方程及齐次方程的解法。

【难点】齐次方程的认识。

## 7.21.3教学过程

**一、可分离变量的微分方程**

设有一阶微分方程

,



如果其右端函数能分解成，即有



.



则称方程为**可分离变量的微分方程**，其中都是连续函数. 根据这种方程的特点，我们可通过积分来求解. 求解可分离变量的方程的方法称为**分离变量法**



**二、齐次方程**

形如



的一阶微分方程称为**齐次微分方程，**简称**齐次方程.**

**三、可化为齐次方程的微分方程**

对于形如



的方程，先求出两条直线



的交点，然后作平移变换



即



这时，，于是，原方程就化为齐次方程



**例题**

例1 求微分方程的通解.



解 分离变量得两端积分得



从而,记则得到题设方程的通解



例2 求微分方程的通解.



解 先合并及的各项,得



设分离变量得



两端积分得



于是 记则得到题设方程的通解



注：在用分离变量法解可分离变量的微分方程的过程中, 我们在假定的前提下, 用它除方程两边, 这样得到的通解, 不包含使的特解. 但是, 有时如果我们扩大任意常数C的取值范围, 则其失去的解仍包含在通解中. 如在例2中，我们得到的通解中应该，但这样方程就失去特解，而如果允许，则仍包含在通解中.



例3 已知 当时，求



解 设则



所以原方程变为即



所以



故



例4 设一物体的温度为100℃，将其放置在空气温度为20℃的环境中冷却. 试求物体温度随时间的变化规律.



解 设物体的温度与时间的函数关系为在上节的例1中我们已经建立了该问题的数学模型:



其中为比例常数.下面来求上述初值问题的解.分离变量,得



两边积分得(其中为任意常数)，



即 (其中).



从而再将条件(2)代入,得



于是，所求规律为



注：物体冷却的数学模型在多个领域有广泛的应用. 例如，警方破案时，法医要根据尸体当时的温度推断这个人的死亡时间，就可以利用这个模型来计算解决，等等.

例5 在一次谋杀发生后，尸体的温度按照牛顿冷却定律从原来的37℃开始下降，假设两个小时后尸体温度变为35℃，并且假定周围空气的温度保持20℃不变，试求出尸体温度随时间的变化规律。又如果尸体被发现时的温度是30℃，时间是下午4点整，那么谋杀是何时发生的?



解 根据物体冷却的数学模型，有



其中是常数，分离变量并求解得



，



代入初值条件，可求得，于是得该初值问题的解为



。



为求出 值，根据两小时后尸体温度为35℃这一条件，由



，



求得，于是温度函数为



，



将代入上式求解，有



，即得（小时）。



于是，可以判定谋杀发生在下午4点尸体被发现前的8.4小时，即8小时24分钟，所以谋杀是在上午7点36分发生的。

例6 某公司t年净资产有(百万元), 并且资产本身以每年5%的速度连续增长, 同时该公司每年要以300百万元的数额连续支付职工工资.



给出描述净资产的微分方程;



(2) 求解方程, 这时假设初始净资产为



(3) 讨论在三种情况下, 变化特点.



解 (1) 利用平衡法，即由净资产增长速度＝资产本身增长速度－职工工资支付速度

得到所求微分方程



(2) 分离变量，得



两边积分，得 为正常数），于是



或



将代入，得方程通解：



上式推导过程中当时，知



通常称为平衡解，仍包含在通解表达式中.

(3) 由通解表达式可知，当百万元时，净资产额单调递减，公司将在第36年破产；当百万元时，公司将收支平衡，将资产保持在600百万元不变；当百万元时，公司净资产将按指数不断增大.



齐次方程

例7 求解微分方程 满足初始条件的特解.



解 题设方程为齐次方程,设则



代入原方程得分离变量得



两边积分得



将回代，则得到题设方程的通解为



利用初始条件得到从而所求题设方程的特解为



例8求解微分方程



解 原方程变形为



令则方程化为



分离变量得



两边积分得



整理得



所求微分方程的解为



例9 求解微分方程



解 原方程变形为（齐次方程）



令则故原方程变为即



分离变量得两边积分得或



回代便得所给方程的通解为



例10求下列微分方程的通解:



解 原方程变形为令则



代入原方程并整理



两边积分得 即



变量回代得所求通解



例11 设商品A和商品B的售价分别为已知价格与相关, 且价格相对的弹性为求与的函数关系式.



解 所给方程为齐次方程，整理，得



令则



分离变量，得



两边积分，得



将回代，则得到所求通解(即与的函数关系式)



为任意正常数).



可化为齐次方程的方程

例12 求的通解.



解 直线和直线的交点是因此作变换代入题设方程,得



令则代入上式,得



分离变量,得两边积分,得



即回代得



再将回代，并整理所求题设方程的通解



例13 利用变量代换法求方程的通解.



解 令则代入原方程得



分离变量得两边积分得回代得



故原方程的通解为



例14 求微分方程的通解.



解 令则代入原方程得



即



分离变量得 或



两端积分得 即



故所求通解为



例15 求下列微分方程的通解.



解 令则原方程化为



再令则代入上式，并整理得



两边积分得 变量还原得通解



【提问】方程是否为齐次方程?



**四、课堂练习**

1.求微分方程的通解.



2.求微分方程的通解（到此课程大概进行到90分钟）



## 7.21.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题8-2：1（2、4、6）；2（1、4）；9

【课后反思】判断方程是否是齐次方程的方法

【课后思考】变量代换在微分方程求解的过程中的使用

【课后预习】一阶线性微分方程。

## 7.21.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．

## 7.22教学单元二十二

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第22单元 | §8.3一阶线性微分方程 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.22.1教学目标

1、让学生了解一阶线性微分方程的概念；

2、掌握一阶线性微分方程的求解方法。

## 7.22.2教学内容（含重点、难点）

1、一阶微分方程的概念；

2、一阶微分方程的解法。

【重点】一阶微分方程的解法。

【难点】常数变异法的理解。

## 7.22.3教学过程

**一、一阶线性微分方程**

形如

(3.1)



的方程称为**一阶线性微分方程**. 其中函数、是某一区间上的连续函数. 当方程(3.1)成为



(3.2)



这个方程称为**一阶齐次线性方程**. 相应地，方程(3.1)称为**一阶非齐次线性方程.**

方程(3.2)的通解

(3.3)



其中为任意常数.



求解一阶非齐次线性微分方程的**常数变易法：**即在求出对应齐次方程的通解(3.3)后，将通解中的常数变易为待定函数，并设一阶非齐次方程通解为



一阶非齐次线性方程(3.1)的通解为

(3.5)



**二、伯努利方程**：形如

(3.7)



的方程称为**伯努利方程**，其中为常数，且.



伯努利方程是一类非线性方程，但是通过适当的变换，就可以把它化为线性的. 事实上，在方程(3.7)两端除以，得



或



于是，令，就得到关于变量的一阶线性方程



.



利用线性方程的求解方法求出通解后，再回代原变量，便可得到伯努利方程(3.7)的通解



**例题**

例1 求方程的通解.



解 于是所求通解为



例2 求方程的通解.



解 这是一个非齐次线性方程.先求对应齐次方程的通解.

由



用常数变易法,把换成即令则有



代入所给非齐次方程得两端积分得



回代即得所求方程的通解为



例3 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.



解 将方程标准化为于是



由初始条件得故所求特解为



例4 求解方程 是的已知函数.



解 原方程实际上是标准的线性方程，其中



直接代入通解公式，得通解



例5 求方程的通解.



解 当将看作的函数时，方程变为



这个方程不是一阶线性微分方程，不便求解.如果将看作的函数，方程改写为



则为一阶线性微分方程，于是对应齐次方程为



分离变量，并积分得即



其中为任意常数，利用常数变易法，设题设方程的通解为代入原方程,得



积分得



故原方程的通解为，其中为任意常数.



例6 如图（见系统演示）所示, 平行于轴的动直线被曲线与截下的线段之长数值上等于阴影部分的面积, 求曲线



解 两边求导得解此微分方程得



由得故所求曲线为



例7 求的通解.



解 两端除以得



令得解得



故所求通解为



伯努利方程

例8 求方程的通解.



解 以除方程的两端,得



即



令则上述方程变为



解此线性微分方程得



以代得所求通解为



例9 求方程的通解.



解 令则于是得到伯努利方程



令上式即变为一阶线性方程



其通解为



回代原变量，即得到题设方程的通解



例10 求解微分方程



解 令则



利用分离变量法解得



将代回，得所求通解为



## 7.22.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题8-3：1（1）、（3）、（4）、（6）；2；5

【课后反思】 常数变易法的理解

【课后思考】一降线性微分方程的标准形式与方程求解公式

【课后预习】可降阶的二阶微分方程

## 7.22.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．

## 7.23教学单元二十三

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第23单元 | §8.4可降阶的二阶微分方程 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.23.1教学目标

1、让学生了解可降阶的二阶微分方程概念；

2、掌握三种类型的可降阶的二阶微分方程的解法。

## 7.23.2教学内容（含重点、难点）

1、可降阶的二阶微分方程概念；

2、可降阶的二阶微分方程的解法。

【重点】可降阶的二阶微分方程的解法。

【难点】第三种类型的可降阶的二阶微分方程的解法。

## 7.23.3教学过程

**一、型**



在方程两端积分，得



再次积分，得



**注**：这种类型的方程的解法，可推广到阶微分方程



**，**



只要连续积分*n*次, 就可得这个方程的含有*n*个任意常数的通解.

**二、型**



这种方程的特点是不显含未知函数*y*，求解的方法是:

令 则，原方程化为以为未知函数的一阶微分方程,



设其通解为



然后再根据关系式 又得到一个一阶微分方程



对它进行积分，即可得到原方程的通解



**三、型**



这种方程的特点是不显含自变量*x*. 解决的方法是：把暂时看作自变量，并作变换 于是，由复合函数的求导法则有



这样就将原方程就化为



这是一个关于变量*y*、*p*的一阶微分方程. 设它的通解为



这是可分离变量的方程，对其积分即得到原方程的通解



**例题**

**型**



例1 求方程满足的特解.



解 对所给方程接连积分二次,得

(1)



(2)



在(1)中代入条件得在(2)中代入条件得



从而所求题设方程的特解为



例2 求方程的通解.



解 设代入题设方程,得



解线性方程,得为任意常数)，即



两端积分,得



再积分得到所求题设方程的通解为

其中为任意常数.



进一步通解可改写为其中为任意常数.



型



例3 求方程的通解.



解 这是一个不显含有未知函数的方程.令则于是题设方程降阶为即两边积分,得



即或



再积分得原方程的通解



例4 求微分方程初值问题.



的特解.

解 题设方程属型.设代入方程并分离变量后,有



两端积分，得即



由条件得所以



两端再积分,得又由条件得



于是所求的特解为



例5 求微分方程满足 且当时，有界的特解.



解法1 所给方程不显含属型,令则代入方程降阶后求解, 此法留给读者练习.



解法2 因为即这是一阶线性微分方程，解得



因为时，有界,得故由此得及



又由已知条件得从而所求特解为



型



例6 求方程的通解.



解 设则代入原方程得即



由可得所以



原方程通解为



例7 求微分方程满足初始条件 的特解.



解 令由代入方程并化简得



上式为可分离变量的一阶微分方程，解得



再分离变量,得由初始条件



定出从而得再两边积分,得或



由定出从而所求特解为



## 7.23.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题8-4：1（1）、（3）、（5）；2

【课后反思】第二第三两种类型的区别与联系

【课后思考】第三种形式的微分方程为何用第二种形式的方法求解不能进行

【课后预习】二阶线性微分方程解的结构

## 7.23.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．

## 7.24教学单元二十四

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第24单元 | §8.5二阶线性微粉方程解的结构  §8.6二阶常系数非齐次线性微分方程 |  | 黄岭 | 4 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.24.1教学目标

1、让学生了解什么是二阶齐次线性微粉方程、线性相关以及特征方程的概念，；

2、理解二阶齐次方程的齐次解的结构的性质以及通解的概念，并牢记其非齐次二阶方程的通解的解的形式；会利用刘维尔公式解题。

3、掌握常数变易法解题；牢记并会利用特征方程的根与解解题。

## 7.24.2教学内容（含重点、难点）

1、二阶常系数微分方程的解的结构、特征方程与对应的解；

【重点】二阶齐次方程的解的结构与非齐次方程的解的结构。

【难点】特征方程的根与特解的求解。

## 7.24.3教学过程

**一、复习**

抽点部分学生回忆上次课的内容：一阶非齐次线性方程的根的形式（约5分钟）

**二、新课讲授**

介绍本次课的主要内容：求二阶齐次方程的解

**（一）二阶线性微分方程解的结构**

**（1）二阶线性方程的概念**

主要介绍其形式的特征。（到此课程大概进行到10分钟）

二阶线性微分方程的一般形式是

， (6.1)



其中、及是自变量的已知函数，函数称为方程(6.1)的自由项. 当时, 方程(6.1)成为



， (6.2)



这个方程称为二阶齐次线性微分方程，相应地，方程(6.1)称为二阶非齐次线性微分方程.

**（2）** 给出定理的一些说明和证明，并且举出例子说明该定理（到此课程大概进行到15分钟）

定理1 如果函数与是方程(6.2)的两个解, 则



(6.3)



也是方程(6.2)的解，其中是任意常数.



**（3）二次方程的通解的结构**

首先给出线性无关和线性无关的概念，并给出一些例子说明。其次给出齐次方程的通解的结构和非齐次方程的结构。（到此课程大概进行到35分钟）

定理2 如果与是方程(6.2)的两个线性无关的特解，则



就是方程(6.2)的通解，其中是任意常数.



定理3 设是方程(6.1)的一个特解，而是其对应的齐次方程(6.2)的通解，则



(6.4)



就是二阶非齐次线性微分方程(6.1)的通解.

定理4 设与分别是方程



与



的特解，则是方程



(6.5)



的特解.

定理5 设是方程



(6.6)



的解，其中为实值函数，为纯虚数. 则与分别是方程



与



例1 已知是某二阶非齐次线性微分方程的三个特解：



（1）求此方程的通解；

（2）写出此微分方程；

（3）求此微分方程满足的特解.



解 (1) 由题设知, 是相应齐次线方程的两个线性无关的解,且是非齐次线性方程的一个特解，故所求方程的通解为



，其中



(2) 因 ①



所以②



从这两个式子中消去即所求方程为



(3) 在①, ②代入初始条件得



从而所求特解为



**（4）介绍降解法和刘维尔公式和常数变易法**

简要介绍降解法并举例；介绍常数变易法并举例（到此课程大概进行到45分钟）

**（二）二阶常系数齐次线性微分方程**

**（1）二阶常系数齐次微分方程及其解法**

介绍特征方程，举例并要求能够写出其形式到此课程大概进行到55分钟）

；介绍特征根与解的结构的关系（到此课程大概进行到80分钟）

**（2）n阶常系数齐次微分方程及其解法**

简要介绍n阶方程与二阶方程的解的结构的关系（到此课程大概进行到85分钟）

**三、知识小结**

用PPT逐条展示主要知识点：1）二阶齐次线性微分方程的通解结构 2）二阶线性非齐次微分方程解的结构。（到此课程大概进行到90分钟）

## 7.24.4作业安排及课后反思

【课后作业】1、习题8-5：1（1）（4）；6

2、习题8-6：1（1）、（8）；2；3.

【课后反思】1、在以后的学习过程中，你将怎样学好数学？

2、怎样才能把微分方程应用到实际生活中？

【课后思考】这里我们研究的是常系数的齐次方程的解，如果是非齐次的，如何求解？

【课后预习】二阶常系数非齐次微分方程

## 7.24.5参考资

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．

## 7.25教学单二十五

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第25单元 | §8.7二阶常系数非齐次线性微分方程 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.25.1教学目标

掌握二阶常系数非齐次线性微分方程的特解求法。

## 7.25.2教学内容（含重点、难点）

1、特征方程的根与特解；

2、特征解的设法与特征根。

## 7.25.3教学过程

**一、第一型**

**（1）复习**

二次齐次微分方程的解的形式（到此课程大概进行到5分钟）

**（2）基础知识**

特征方程、多项式的概念（到此课程大概进行到8分钟）

**（3）第一型**

应该设其特解根为y\*=Q(x)

特征方程的根与特解的结论是

不是根：y\*Qm(x)ex

单根：y\*

重根：

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法

(7.1)



特征方程 (7.2)



称特征方程的两个根为特征根.



这种根据二阶常系数齐次线性方程的特征方程的根直接确定其通解的方法称为特征方程法.

例题（到此课程大概进行到45分钟）

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法

例1 求方程的通解.



解 所给微分方程的特征方程为



其根是两个不相等的实根，因此所求通解为



例2 求方程的通解.



解 特征方程为解得故所求通解为



例3 求方程的通解.



解 特征方程为解得故所求通解为



n阶常系数齐次线性微分方程的解法

例4 求方程的通解.



解 特征方程为即



特征根是和因此所给微分方程的通解为



例5 求方程的通解, 其中



解 特征方程为由于



特征方程为特征根为



因此所给方程的通解为



例6 求下列微分方程的通解.

(1)



(2)



解 特征方程为即特征根



通解为



(2) 特征方程为即



特征根



通解为



例7 已知一个四阶常系数齐次线性微分方程的四个线性无关的特解为



求这个四阶微分方程及其通解.

解 由与可知，它们对应的特征根为二重根



由与可知，它们对应的特征根为一对共轭复根



所以特征方程为即



它所对应的微分方程为



其通解为



**二、第二型**

（1）特解的形式

根据特征方程的根写出特解的具体形式。（到此课程大概进行到55分钟）

型



当时，二阶常系数非齐次线性微分方程(8.1)具有形如



(8.4)



的特解，其中是与同次（次）的多项式，而按是不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取0、1或2.



上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程，但要注意(8.4)式中的k是特征方程的根的重数（即若不是特征方程的根，取0；若是特征方程的重根，取为）.



或型



即要求形如

(8.7)



(8.8)



两种方程的特解.

由欧拉公式知道，和分别是



的实部和虚部.

我们先考虑方程

. (8.9)



这个方程的特解的求法在上一段中已经讨论过. 假定已经求出方程(8.9)的一个特解，则根据第六节的定理5知道，方程(8.9)的特解的实部就是方程(8.7)的特解，而方程(8.9)的特解的虚部就是方程(8.8)的特解.

方程(8.9)的指数函数中的()是复数，特征方程是实系数的二次方程，所以只有两种可能的情形：或者不是特征根，或者是特征方程的单根. 因此方程(8.9)具有形如



(8.10)



的特解，其中是与同次（次）的多项式，而按是不是特征方程的根或是特征方程的单根依次取0或1.



上述结论可推广到阶常系数非齐次线性微分方程，但要注意(8.10)式中的k是特征方程含根的重复次数.



（2）例题

**型**



例1 下列方程具有什么样形式的特解?

(1) (2)



(3)



解 (1) 因不是特征方程的根,故方程具有特解形式：



(2) 因是特征方程的单根,故方程具有特解形式:



(3) 因是特征方程的二重根，所以方程具有特解形式：



例2 求方程的一个特解.



解 题设方程右端的自由项为型，其中



对应的齐次方程的特征方程为 特征根为



由于不是特征方程的根，所以就设特解为



把它代入题设方程,得



比较系数得解得



于是，所求特解为



例3 求方程的通解.



解 题设方程对应的齐次方程的特征方程为特征根为



于是，该齐次方程的通解为



因是特征方程的单根，故可设题设方程的特解：



代入题设方程,得比较等式两端同次幂的系数,得



于是，求得题没方程的一个特解



从而，所求题设方程的通解为



例4 求微分方程的通解.



解 特征方程为特征根为



故对应齐次方程的通解为



观察可得, 的一个特解为的一个特解为



例5 求方程的特解.



解 其对应齐次方程的特征方程为解得特征根为由第六节定理4知,题设方程的特解是下列两个方程的特解的和:



(1)



(2)



因特征方程有重根所以设方程(1)的特解



将其代入方程并消去整理后得



即



于是得特解



又因特征方程有重根所以设方程(2)的特解为



求导后代入方程，解出得特解



所以题设方程的特解为：



例6 求方程的通解.



解 对应的齐次方程的特征方程为特征根



所求齐次方程的通解



由于不是特征方程的根，因此方程的特解形式可设为代入题设方程易解得



故所求方程的通解为



例7 求方程的通解.



解 对应齐次方程的特征方程的特征根为故对应齐次方程的通解



作辅助方程



是单根,故设代入上式得



取虚部得所求非齐次方程特解为



从而题设方程的通解为



或型



例8 求方程的通解.



解 对应齐次方程的特征方程的特征根为故对应齐次方程的通解



作辅助方程



不是特征方程的根，故设代入辅助方程得



取实部得到所求非齐次方程的一个特解:



所求非齐次方程的通解为



例9 设函数满足



求.



解 将方程两端对求导，得微分方程 即



特征方程为特征根为对应齐次方程的通解为



注意到方程的右端且不是特征根，根据非齐次方程解的叠加原理，可设特解



代入方程定出从而原方程的通解为



又在原方程的两端令得



又在原方程的两端令得



定出从而所求函数为



例10 求以(其中为任意常数)为通解的线性微分



方程.

解法1 (1)



(2)



由式(1)知代入(2)式得



所求方程为



解法2 因由解的结构知所求方程为二阶常系数非齐次线性微分方程，对应齐次线性方程有两个特解故有二重特征根于是特征方程为即对应齐次线性方程为



令该方程为因为其解,故



从而所求方程为



例11 已知函数是二阶常系数非齐次线性微分方程



的一个特解, 试确定常数与及该方程的通解.



解法1 将代入原方程得



比较两边同类项系数，得方程组



解此方程组,得



于是原方程为其通解为



解法2 将已知方程的特解改写为



因对应齐次方程的解应是型的,如是对应齐次方程的解, 也可能是，因原方程的自由项是而或是原非齐次方程的解,故也是对应齐次方程的解(即也是特征方程的根).故原方程所对应的齐次方程的特征方程为



即



于是得将代入方程得



原方程的通解为



到此课程大概进行到85分钟。

**三、知识小结**

和学生一起总结，用PPT逐条展示所学主要内容：第一二型的特解的设法（到此课程大概进行到90分钟）

## 7.25.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题8-7：1（1）（3）（5）（6）

【课后反思】1、你是怎样非齐次方程的根的求法的？

2、体会非齐次方程在学习和生活中的运用？

【课后预习】欧拉方程

## 7.25.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．

## 7.26教学单元二十六

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第26单元 | §8.8数学建模——微分方程的应用举例 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.26.1教学目标

1、会用微分方程解决衰变问题、价格调整、人才分配、追迹问题等简单的实际应用问题；

## 7.26.2教学内容（含重点、难点）

1、衰变问题；

2、逻辑斯蒂方程；

3、人才分配问题；

4、追迹问题。

## 7.26.3教学过程

**一、引入：**

介绍微分方程的重要作用，引出本节要讨论的问题

（到此课程大概进行到10分钟）

**二、微分方程应用举例**

**1、**衰变问题：

回顾衰变原理，介绍衰变问题数学模型的建立与求解，并总结建立数学模型的思想方法。

例1 镭、铀等放射性元素因不断放射出各种射线而逐渐减少其质量, 这种现象称为放射性物质的衰变. 根据实验得知, 衰变速度与现存物质的质量成正比, 求放射性元素在时刻t的质量.

解 用x表示该放射性物质在时刻t的质量, 则表示x在时刻t的衰变速度, 于是“衰变速度与现存的质量成正比”可表示为

 (8.1)

这是一个以x为未知函数的一阶方程, 它就是放射性元素衰变的数学模型, 其中是比例常数, 称为衰变常数, 因元素的不同而异. 方程右端的负号表示当时间t增加时, 质量x减少.

解方程(8.1)得通解若已知当时, 代入通解中可得 则可得到方程(8.1)特解



它反映了某种放射性元素衰变的规律.

注: 物理学中, 我们称放射性物质从最初的质量到衰变为该质量自身的一半所花费的时间为半衰期, 不同物质的半衰期差别极大. 如铀的普通同位素()的半衰期约为50亿年;通常的镭()的半衰期是上述放射性物质的特征, 然而半衰期却不依赖于该物质的初始量, 一克衰变成半克所需要的时间与一吨衰变成半吨所需要的时间同样都是1600年, 正是这种事实才构成了确定考古发现日期时使用的著名的碳-14测验的基础.

2、逻辑斯蒂方程：

借助树的增长问题，介绍逻辑斯蒂方程的建立与求解，并总结建立数学模型的思想方法。

一棵小树刚栽下去的时候长得比较慢, 渐渐地, 小树长高了而且长得越来越快, 几年不见, 绿荫底下已经可乘凉了; 但长到某一高度后, 它的生长速度趋于稳定, 然后再慢慢降下来. 这一现象很具有普遍性. 现在我们来建立这种现象的数学模型.

如果假设树的生长速度与它目前的高度成正比, 则显然不符合两头尤其是后期的生长情形, 因为树不可能越长越快; 但如果假设树的生长速度正比于最大高度与目前高度的差, 则又明显不符合中间一段的生长过程. 折衷一下, 我们假定它的生长速度既与目前的高度,又与最大高度与目前高度之差成正比.

设树生长的最大高度为H(m), 在t(年)时的高度为h(t), 则有

 (8.2)

其中是比例常数. 这个方程为Logistic方程. 它是可分离变量的一阶常数微分方程.

下面来求解方程(8.2). 分离变量得



两边积分 

得 

或 

故所求通解为



其中的是正常数.

函数的图象称为Logistic曲线. 图8-8-1所示的是一条典型的Logistic曲线, 由于它的形状, 一般也称为S曲线. 可以看到, 它基本符合我们描述的树的生长情形. 另外还可以算得



这说明树的生长有一个限制, 因此也称为限制性增长模式.

注: Logistic的中文音译名是“逻辑斯谛”. “逻辑”在字典中的解释是“客观事物发展的规律性”, 因此许多现象本质上都符合这种S规律. 除了生物种群的繁殖外, 还有信息的传播、新技术的推广、传染病的扩散以及某些商品的销售等. 例如流感的传染、在任其自然发展(例如初期未引起人们注意)的阶段, 可以设想它的速度既正比于得病的人数又正比于未传染到的人数. 开始时患病的人不多因而传染速度较慢; 但随着健康人与患者接触, 受传染的人越来越多, 传染的速度也越来越快; 最后, 传染速度自然而然地渐渐降低, 因为已经没有多少人可被传染了.

下面举两个例子说明逻辑斯谛的应用.

人口阻滞增长模型 1837年, 荷兰生物学家Verhulst提出一个人口模型

 (8.3)

其中的称为生命系数.

我们不详细讨论这个模型, 只提应用它预测世界人口数的两个有趣的结果.

有生态学家估计k的自然值是0.029. 利用本世纪60年代世界人口年平均增长率为2%以及1965年人口总数33.4亿这两个数据, 计算得从而估计得:

(1)世界人口总数将趋于极限107.6亿.

(2)到2000年时世界人口总数为59.6亿.

后一个数字很接近2000年时的实际人口数, 世界人口在1999年刚进入60亿.

新产品的推广模型 设有某种新产品要推向市场, t时刻的销量为由于产品性能良好, 每个产品都是一个宣传品, 因此, t时刻产品销售的增长率与成正比, 同时, 考虑到产品销售存在一定的市场容量N, 统计表明与尚未购买该产品的潜在顾客的数量也成正比, 于是有

 (8.4)

其中k为比例系数. 分离变量积分, 可以解得

 (8.5)

由 

当时, 则有即销量单调增加. 当时, 当时, 当时, 即当销量达到最大需求量N的一半时, 产品最为畅销, 当销量不足N一半时, 销售速度不断增大, 当销量超过一半时, 销售速度逐渐减少.

国内外许多经济学家调查表明. 许多产品的销售曲线与公式(8.5)的曲线(逻辑斯谛曲线)十分接近. 根据对曲线性状的分析, 许多分析家认为, 在新产品推出的初期, 应采用小批量生产并加强广告宣传, 而在产品用户达到20%到80%期间, 产品应大批量生产; 在产品用户超过80%时, 应适时转产, 可以达到最大的经济效益.

3、价格调整问题：

回顾市场供求问题，介绍价格调整问题数学模型的建立与求解，并总结建立数学模型的思想方法。

在本章第一节例3已经假设, 某种商品的价格变化主要服从市场供求关系. 一般情况下,商品供给量S是价格P的单调递增函数, 商品需求量Q是价格P的单调递减函数, 为简单起见, 分别设该商品的供给函数与需求函数分别为

 (8.6)

其中均为常数, 且

当供给量与需求量相等时, 由(8.6)可得供求平衡时的价格



并称为均衡价格.

一般地说, 当某种商品供不应求, 即时, 该商品价格要涨, 当供大于求, 即时, 该商品价格要落. 因此, 假设t时刻的价格的变化率与超额需求量成正比, 于是有方程



其中用来反映价格的调整速度.

将(8.6)代入方程, 可得

 (8.7)

其中常数方程(8.7)的通解为



假设初始价格代入上式, 得于是上述价格调整模型的解为



由于知, 时, 说明随着时间不断推延, 实际价格将逐渐趋近均衡价格.

4、人才分配问题：

直观分析人才分配问题，介绍人才分配问题数学模型的建立与求解，并总结建立数学模型的思想方法。

每年大学毕业生中都要有一定比例的人员留在学校充实教师队伍, 其余人员将分配到国民经济其他部门从事经济和管理工作. 设t年教师人数为科学技术和管理人员数目为又设1外教员每年平均培养个毕业生, 每年人教育、科技和经济管理岗位退休、死亡或调出人员的比率为表示每年大学生毕业生中从事教师职业所占比率于是有方程

 (8.8)

 (8.9)

方程(8.8)有通解

 (8.10)

若设则于是得特解

 (8.11)

将(8.11)代入(8.9)方程变为

 (8.12)

求解方程(8.12)得通解

 (8.13)

若设则于是得特解

 (8.14)

(8.11)式和(8.14)式分别表示在初始人数分别为情况, 对应于的取值, 在t年教师队伍的人数和科技经济管理人员人数. 从结果看出, 如果取即毕业生全部留在教育界, 则当时, 由于必有而说明教师队伍将迅速增加. 而科技和经济管理队伍不断萎缩, 势必要影响经济发展, 反过来也会影响教育的发展. 如果将接近于零. 则同时也导致说明如果不保证适当比例的毕业生充实教师选择好比率, 将关系到两支队伍的建设, 以及整个国民经济建设的大局.

5、追迹问题：

直观分析追迹问题，介绍追迹问题数学模型的建立与求解，并总结建立数学模型的思想方法。

设开始时甲、乙水平距离为1单位, 乙从A点沿垂直于OA的直线以等速向正北行走; 甲从乙的左侧O点出发, 始终对准乙以的速度追赶. 求追迹曲线方程, 并问乙行多远时, 被甲追到.

解 设所求追迹曲线方程为经过时刻t, 甲在追迹曲线上的点为乙在点于是有

 (8.15)

由题设, 曲线的弧长OP为



解出代入(8.15), 得



两边对x求导, 整理得



这就是追迹问题的数学模型.

这是一个不显含y的可降阶的方程, 设, 代入方程得

 或 

两边积分, 得



即 

将初始条件代入上式, 得于是

 (8.16)

两边同乘并化简得

 (8.17)

(8.16)与(8.17)式相加, 得



两边积分, 得



代入初始条件得故所求追迹曲线方程为



甲追到乙时, 即曲线上点P的横坐标此时即乙行走至离A点个单位距离时被甲追到.

（到此课程大概进行到85分钟）

**三、知识小结**

引导学生一起总结，用PPT逐条展示所学主要内容（到此课程大概进行到90分钟）

## 7.26.4作业安排及课后反思

【课后作业】

【课后反思】

【课后思考】

【课后预习】差分方程

## 7.26.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．

## 7.27教学单元二十七

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第27单元 | §8.9差分方程 |  | 黄岭 | 4 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.27.1教学目标

1、了解差分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解的概念，知道线性差分方程和非线性差分方程的分类。；

## 7.27.2教学内容（含重点、难点）

1、差分与差分方程的概念；

2、一阶常系数线性齐次差分方程及解法；

3、一阶常系数线性非齐次差分方程及解法；

4、二阶常系数线性差分方程及解法。

## 7.27.3教学过程

**一、引入：**

回顾微分的内容，引入差分的概念。

（到此课程大概进行到10分钟）

**二、差分方程**

**1、差分的定义**

分析微分的概念，导出差分的定义，并介绍其性质。

差分的概念与性质

一般地，在连续变化的时间范围内，变量关于时间的变化率是用来刻画的；对离散型的变量，我们常取在规定的时间区间上的差商来刻画变量的变化率. 如果选择，则



可以近似表示变量的变化率. 由此我们给出差分的定义.

定义1 设函数 称改变量为函数的差分, 也称为函数的一阶差分, 记为, 即

 或 .

一阶差分的差分称为二阶差分, 即





类似可定义三阶差分, 四阶差分,……



一般地，函数的阶差分的差分称为阶差分，记为，即



二阶及二阶以上的差分统称为高阶差分.

差分的性质：

（1）  

（2） 

（3）

（4） 

例题选讲：

例1 设求 

解 





例2 设求.

解 设则





例3 求的差分.

解法1 由差分的定义，有



解法2 由差分的性质，有





例4 设 求

解 由差分的定义，有



由二阶差分的定义及差分的性质，有



由三阶差分的定义，有



注：若为次多项式，则为常数，且

例5 试改变差分方程的形式.

解 因 



代入原方程得



化简得 

因此原方程可改写为



**2、差分方程的概念：**

类比常微分方程，给出差分方程的定义，并介绍差分方程的通解、特解以及线性差分方程的概念。

差分方程的概念

定义2 含有未知函数的差分的方程为差分方程.

差分方程的一般形式:



或 

差分方程中所含未知函数差分的最高阶数称为该差分方程的阶. 差分方程的不同形式可以互相转化.

定义3 满足差分方程的函数称为该差分方程的解.

如果差分方程的解中含有相互独立的任意常数的个数恰好等于方程的阶数, 则称这个解为该差分方程的通解.

我们往往要根据系统在初始时刻所处的状态对差分方程附加一定的条件，这种附加条件称为初始条件, 满足初始条件的解称为特解.

定义4 若差分方程中所含未知函数及未知函数的各阶差分均为一次的, 则称该差分方程为线性差分方程.

线性差分方程的一般形式是



其特点是都是一次的..

例题选讲：（选择1-2例，介绍差分定义及其相关计算）

例6 试确定下列差分方程的阶.



解 (1) 由于方程中未知函数下标得最大差为7，由阶的定义，此方程的阶为7.

(2) 由于方程中未知函数下标的最大差为4，由阶的定义，此方程的阶为4.

例7 指出下列等式哪一个是差分方程, 若是, 进一步指出是否为线性方程.



解 (1) 将原方程变形为



即知此方程不是差分方程.

(2) 由定义知此方程是差分方程，且是线性差分方程.

**3、一阶常系数线性差分方程**

分析差分方程的不同形式，给出一阶常系数线性差分方程的一般形式，以及方程解的形式，另外，分析一阶常系数线性非齐次差分方程与齐次差分方程的关系，给出它的通解形式——定理1.

一阶常系数线性差分方程

一阶常系数线性差分方程的一般形式为

 (9.1)

其中, P为非零常数, 为已知函数. 如果则方程变为

 (9.2)

方程(9.2)称为一阶常系数线性齐次差分方程, 相应地，方程(9.1)称为一阶常系数线性非齐次差分方程.

一阶常系数线性齐次差分方程的通解

一阶常系数线性非齐次差分方程

定理1 设为方程(9.2)的通解,为方程(9.1)的一个特解, 则为方程(9.1)的通解.

（1） (C为非零常数)

（2） (C, b为非零常数且)

四、二阶常系数线性差分方程

二阶常系数线性差分方程的一般形式:

 (9.9)

其中均为常数, 且 是已知函数. 当时, 方程(9.9)变为

 (9.10)

方程(9.10)称为二阶常系数线性齐次差分方程，相应地，方程(9.9)称为二阶常系数线性非齐次差分方程.

定理2 设为方程((9.10)的通解, 为方程(9.9)的一个特解, 则为方程(9.9)的通解.

二阶常系数线性齐次差分方程的通解

特征方程  (9.11)

二阶常系数线性非齐次差分方程的特解和通解

仅考虑方程(9.9)中的取某些特殊形式的函数时的情形.

(1)(其中是t的m次多项式), 方程(9.9)具有形如的特解, 其中为t的m次待定多项式

例题选讲：（选择3-4例，介绍一阶常系数线性齐次和非齐次方程的求解方法）

例8 (E06) 求差分方程的通解.

解 由(3)式得，原方程的通解为 

例9 (E07) 求差分方程的通解.

解 由于故原方程的通解为 

例10 (E08) 求差分方程在初始条件时的特解.

解 由 得原方程得通解为



将代入上式，得 故所求原方程的特解为



例11 (E09) 求差分方程的通解.

解 设为原方程的解，将代入原方程，有



比较同次幂系数得



从而



原方程的通解为



例12 求差分方程的通解.

解 此方程为一阶线性常系数非齐次方程，且故对应的齐次方程的通解为



又即故



于是原方程有型如的特解，其中为待定系数.

将及代入原方程得



整理得比较系数得



即于是原方程的特解为 故原方程的通解为



例13 求差分方程 满足初始条件的特解.

解法1 此方程是一阶线性常系数非齐次方程，且故对应的齐次方程的通解为



又为一次多项式，故原方程具有型如的特解，将它代入原方程得 

整理得比较系数得



即于是原方程的特解为  故原方程的通解为

将初始条件代入，得所以满足初始条件的解为



解法2 对应的齐次方程的特征方程为得特征根为故对应得齐次方程的通解为又为一次多项式，故它具有型如的特解.将及代入原方程得



整理得比较系数得



解得故原方程的特解为从而原方程的通解为

将初始条件代入，得于是原方程满足初始条件的解为



例14 求差分方程的通解.

解  先求对应的齐次差分方程的通解.

因所以对应的齐次差分方程的通解为

 再求差分方程的特解.

因且故它具有形如的特解，将它代入中的方程得



比较系数得



解之得 

故中方程的特解为



 最后求差分方程的特解.

因故中方程的特解为

由，得原方程的特解为

于是原方程的通解为

例15 设某产品在时期的价格, 供给量与需求量分别为与. 当, 时, 求证

(1) 由推出差分方程

(2) 已知, 求上述差分方程的解.

解 (1) 因为所以，即从而



(2) 方程是一阶常系数线性非齐次方程，它对应的齐次方程为

 因为故齐次方程的通解为

又方程的右端项且故方程的特解为



于是方程的通解为



当已知时，则所以满足初始条件的解是



例16 在农业生产中, 种植先于产出及产品出售一个适当的时期, t时期该产品的价格决定着生产者在下一时期愿意提供市场的产量还决定着本期该产品的需求量因此有

 (a, b, c, d均为正的常数)

求价格随时间变动的规律.

解 假定在每一个时期中价格总是确定在市场售清的水平上，即因此可得到

 即 

故  (常数

因为所以这属于右端为常数的情形.从而方程的特解为而相应齐次方程的通解为 故问题的通解为

当时，(初始价格)，代入得

即满足初始条件时的特解为



（到此课程大概进行到90分钟）

**4、二阶常系数线性差分方程**

回顾一阶常系数线性差分方程，导出二阶常系数线性差分方程的一般形式，并导出求通解的方法——定理2，并对其通解和特解进行分析。

例题选讲：（选择3-4例，介绍求二阶常系数线性差分方程的方法）

例17 (E10) 求差分方程的通解.

解 题设方程的特征方程为即

因而特征根为故原方程的通解为



例18 (E11) 求差分方程的通解.

解 题设方程的特征方程为即

因而特征根为所以题设方程的通解为



例19 (E12) 求差分方程的通解.

解 此方程为二阶常系数线性齐次方程，其通解的求法应采用特征根法.

此方程对应的特征方程为



解之得共轭复根 ，即

故又故于是原方程的通解为



例20 求差分方程 的通解及的特解.

解 特征方程 即 

故对应齐次方程的通解为 

因为但故设题设的特解形式为代入原方程解得 即从而所给方程的通解为 

由及定解条件得

由及定解条件得



故所求特解为 

例21 (E13) 求差分方程的通解.

解 易见题设方程对应齐次方程的通解为



因且故设特解形式

代入方程得





所以故所求通解 

例22 (E14) 求差分方程的通解.

解 对应的齐次方程的特征方程为 解得

则对应的齐次方程的通解为



又设特解代入方程，得



消去得于是得特解

故所求方程的通解为 

例23 求差分方程的通解.

解 此方程对应的齐次方程为特征方程为

特征根为故对应的齐次方程的通解为



又原方程的右端项

且及

设原方程的特解代入原方程可解得从而所求原方程的特解



于是原方程的通解为



**5、差分方程在经济学中的应用（简介）**

回顾差分方程的概念，举例介绍差分方程在经济学中的应用。

（到此课程大概进行到85分钟）

**三、知识小结**

引导学生一起总结，用PPT逐条展示所学主要内容（到此课程大概进行到90分钟）

## 7.77.4作业安排及课后反思

【课后作业】习题8-9：1（1）（3）；5、（1）（3）（5）；6、（1）（3）

【课后反思】学习差分方程有何重要意义？

【课后思考】

【课后预习】期末复习

## 7.27.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．

## 7.29教学单元二十九

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第29单元 | 第八章单元总复习 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.29.1教学目标

回顾本章的主要内容；

## 7.29.2教学内容（含重点、难点）

1、可分离变量方程；

2、一阶线性微分方程；

3、二阶微分方程。

4、差分方程

## 7.29.3教学过程

**一、了解微分方程的定义的相关知识**

多举例子说明可分离变量微分方程的解法，同时要求能够牢记一阶线性微分方程的解的具体形式（到此课程大概进行到30分钟）

**二、二阶微分方程**

给出解的一些结构，同时要求牢记；同时举出三个例子，说明具体用法（此课程大概进行到75分钟）

**三、差分方程**

给出差分方程的解的方法，并给出例题（到此课程大概进行到90分钟）

## 7.29.4作业安排及课后反思

【课后作业】牢记本章的有关解的结构。

【课后反思】如何更好的复习？

【课后思考】如何提高数学考试成绩？

【课后预习】准备总复习并做好期末考试

## 7.29.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．

## 7.30教学单元二十九

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **教学单元** | **教学章节** | **教学日期** | **教学地点** | **教学时数** | **教学方法** |
| 第30单元 | 学期总复习 |  | 黄岭 | 2 | 多媒体教学  结合讲授 |

## 7.30.1教学目标

1、促进学生对这学期所学知识内容的总结与归纳；

2、加强学生对本学期知识点的理解与掌握。

## 7.30.2教学内容

1、内容回顾；

2、主要解题方法与技巧；

3、以往期末试卷试题选讲与题型分析

## 7.30.3教学过程

**一、内容回顾**

第二学期讲解的内容共有五大块：空间解析几何与向量代数，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数。

空间解析几何与向量代数包括向量及其线性运算、空间直角坐标系、向量的坐标、数量积、向量积、曲面及其方程、空间曲线及其方程、平面及其方程、空间直线及其方程、二次曲面；

多元函数微分学包括多元函数的基本概念、偏导数、全微分及其应用、复合函数微分法、隐函数微分法、多元函数的极值；

重积分包括二重积分的概念与性质、二重积分的计算；

无穷级数包括常数项级数的概念与性质、正项级数的判别法、一般常数项级数、幂级数、函数展开成幂级数。

（到此课程大概进行到25分钟）

**二、主要解题方法与解题技巧**

主要解题方法包括多元函数偏导数的计算方法，二重积分的计算法，常数项级数的判别法，微分方程和差分方程的解法。

根据情况选取一些具有代表性的经典例题进行讲解，让学生理解本学期所学知识的重点与难点。（到此课程大概进行到45分钟）

**三、以往期末试卷试题选讲与题型分析**

通过对以往期末试卷题型的选讲与分析，让学生更好的掌握期末考试的重点、要点，更好的完成期末考试。（到此课程大概进行到90分钟）

## 7.30.4作业安排及课后反思

【课后作业】每一章的复习题中的重要习题

## 7.3 0.5参考资料

1．同济大学数学教研室．高等数学（第六版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．第8章至第12章．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．第7章至第10章。

## 课程结语

高等数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段。在你进入大学学习所有大学课程中，就巩固你的学习基础、提升学习能力、培养科学素养和创新能力而言，高等数学是最有用且最值得你努力的课程，学好它，你将受益终生。

# 8．课程要求

## 8.1学生自学要求

1、课前希预习有关知识；

2、课后希复习课堂所讲知识

## 8.2课外阅读要求

希阅读有关参考书籍

# 9．课程考核

## 9.1出勤、作业等的要求

* 出勤情况：不定期抽查；
* 未请假缺席，平时成绩-10/次；
* 作业记为：A（优）、B（良）、C（中）、D（及格）、E（不及格）；
* 上交作业情况：每次记载，缺交-10/次；
* 课堂提问：视回答情况按A、B、C、D、E记分

## 9.2成绩的构成与评分规则说明

平时成绩 ：30%；

课程考核成绩=平时成绩（30%）+期末考核成绩（70%）

## 9.3考试形式及说明

考试形式及说明（含补考）：期末考试为闭卷考试。考试持续时间为120分钟。

考试题型包括：单选题、填空题、大题。各题型所占比例为：

1、单选（5\*4=20） 2、填空（5\*4=20） 4、大题（60）

# 10．学术诚信

## 10.1考试违规与作弊处理

期末考试违规与作弊将受到学校教务处的相关处理。考试成绩记零分，取消补考资格，直接重修该门课程。请诚信考试。

# 11．课堂规范

## 11.1课堂纪律

严格按教务处规定执行

## 11.2课堂礼仪

按学校规定执行

# 12．课程资源

## 12.1教材与参考书

教材：《高等数学》，吴赣昌主编，中国人民大学出版社

参考教材：

1同济大学数学教研室．高等数学（第四版）[M] ．北京：高等教育出版社2010年．

2．杨勇、谢巍．高等数学（第二版）[M] ．成都：西南交通大学出版社， 2009年．

## 12.3网络课程资源

http://xxkj.math168.com

# 13．教学合约

**13.1阅读课程实施大纲，理解其内容**

**13.2同意遵守课程实施大纲中阐述的标准和期望**