四川理工学院课程实施大纲

|  |
| --- |
| **课程名称：复变函数** |
| **授课班级：2014级测控1,2,3班** |
| **任课教师：雷远明** |
| **工作部门：理学院工程数学中心** |
| **联系方式：13890093560** |

**四川理工学院 制**

**2016年3月**

**《复变函数》课程实施大纲**

**基本信息**

|  |
| --- |
| 课程代码：10000384  课程名称： 复变函数  学 分：2  总 学 时：30学时  学 期：2015-2016学年第2学期  授课班级：2014级测控1,2,3班  任课教师：雷远明  学 院：理学院  邮 箱：www.leiyuanming@126.com  联系电话：13890093560 |

**目 录**

1. 教学理念 ……………………………………………………………………5

2. 课程介绍 ……………………………………………………………………5

3. 教师简介 ……………………………………………………………………5

4. 先修课程 ……………………………………………………………………5

5. 课程目标 ……………………………………………………………………5

6. 课程内容 ……………………………………………………………………5

6.1 课程内容概要 ………………………………………………………… …5

6.2教学重点、难点、学时安排 ………………………………………………6

7. 教学实施 ……………………………………………………………………6

7.1教学单元一 …………………………………………………………………7

7.2教学单元二…………………………………………………………………13

7.3教学单元三…………………………………………………………………18

7.4教学单元四…………………………………………………………………25

7.5教学单元五…………………………………………………………………28

7.6教学单元六…………………………………………………………………34

7.7教学单元七…………………………………………………………………39

7.8教学单元八…………………………………………………………………46

7.9教学单元九…………………………………………………………………52

7.10教学单元十 ………………………………………………………………57

7.11教学单元十一 ……………………………………………………………63

7.12教学单元十二……………………………………………………………69

7.13教学单元十三……………………………………………………………74

8. 课程学习要求………………………………………………………………82

9. 课程考核方式及评分规则 ……………………………………………… 82

10. 学术诚信规定 ……………………………………………………………83

11. 课堂规范…… ……………………………………………………………83

12. 教学合约及学生签名确认… ……………………………………………85

**1．教学理念**

展示知识的产生、发展过程;强调基本概念、基本理论、基本方法的掌握;注重数学计算能力、学习能力的提高.

**2．课程介绍**

《复变函数》是工科类学校大部分专业的基础专业课程. 课程基础性强,理论体系比较成熟. 复变函数的概念、理论和方法是学生后续专业课程学习的基础和工具. 学习好复变函数的理论和方法, 对于进一步的学习和研究有十分重要的意义和作用.

**3．教师简介**

3.1 教师的职称、学历: 讲师, 研究生学历.

3.2教育背景: 本科在四川大学数学系学习数学基础理论和知识,硕士研究生阶段在复旦大学数学研究所学习和研究偏微分方程的基本理论和相关问题.

3.3研究兴趣（方向）:偏微分方程中有很强实际应用背景的双曲型方程解的存在性、奇异性等问题的研究.

**4．先修课程:** 高等数学

**5．课程目标**

通过本门课程的学习, 掌握复变函数的基本概念、基本理论、基本方法, 进一步提高数学的学习能力、计算能力和应用能力.

**6．课程内容**

**6.1课程的内容概要:** 复数概念和运算的扩展; 复变函数的基本概念和运算; 复变函数导数、解析、奇点的概念, 判别方法以及常见复变函数的概念、性质和介绍; 复变函数积分的概念、基本理论和计算方法; 复级数收敛的概念和判别方法, 复变函数的Taylor展开以及Laurent展开; 孤立奇点的概念及分类, 极点级数的概念及求法, 复变函数在孤立奇点留数的概念、留数的计算规则, 复变函数积分的留数计算方法以及留数方法在定积分计算中的应用.

**6.2教学重点、难点:** 复变函数积分的基本理论和留数计算方法是课程的重点.复变函数的Laurent展开及留数方法在积分计算中的应用是课程教学中的难点.

**6.3学时安排**: 30学时

**7.课程实施**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第一讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 复数的表示及运算 | 2/1 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、 熟悉复数基本代数运算;  二、了解复数的几种表达形式及相关概念;  三、了解复数的方幂及方根运算. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、复数代数运算;  二、非零复数模、辐角、辐角主值的概念;  三、复数三角形式、指数形式及Euler公式;  四、复数方幂及方根运算.  **重点:**  复数三角形式、指数形式.  **难点:**  复数方幂及方根运算. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| **§1.1 复数及其代数运算**  **一、复数的概念**  1. 虚数单位.对虚数单位的规定:  (1)  (2) 与实数在一起时,按同样的法则进行四则运算.  2. 复数: 对于任意两个实数，称或为复数。其中分别称为  的实部和虚部，记作  当时，称为纯虚数；当时，把看作实数. 复数是  实数的推广.  两对于复数：  复数等于零：  说明: 两个都退化成实数（两个复数的虚部同时为零）的复数可以比较大小； 否则,  就不能比较大小.  **二、复数的代数运算**  设两个复数，则   1. 两复数的和差: 2. 两复数的积: 3. 共轭复数: 实部相同而虚部是相反数的两个复数称为共轭复数，即 的共轭复数   **例1** 计算复数与其共轭复数的乘积  **解** 根据平方差公式, 有  结论：任何复数与其共轭的乘积是一个非负实数.   1. 共轭复数的性质:   (1)  (2)  (3)  5. 两复数的商:    **例2** 复数的实部虚部共轭复数 与其共轭  复数的乘积：  商：  **例3** 实数取何值时，复数  是 （1）实数； （2） 纯虚数？  **解** 令  （1）复数是实数，则复数的虚部由有或  （2）复数是纯虚数，则 由有或  但由知应舍去，所以只有  **§1.2 复数的几何表示**  **1. 复平面的定义**  任意复数都与有序实数对一一对应。因此，一个建立了直角坐标系  的平面可以用来表示复数，通常把坐标系的横轴称为实轴或轴，纵轴称为虚轴或  轴. 这种用来表示复数的平面称为复平面.  **2. 复数的模(或绝对值)**  复数可以用复平面上起点为原点，终点为表示该复数的点 所对应的向量来表示。这个向量的长度称为复数的模或绝对值，记作    对于复数的模，有  **3. 复数的辐角**  在复数时，以正实轴为始边，表示的向量为终边的角的弧度数称为复  数的辐角，记作  注意: 任意复数有无穷多个辐角. 若是复数的任一个辐角，则该复数的  所有辐角 其中是任意整数.  时，辐角没有定义.  在应用中，为了避免复数有无穷多个辐角所带来的不方便，把的所有辐角中，  满足条件的一个辐角称为它的辐角主值，记作    复数辐角主值的确定：  （1）坐标轴上复数的情形；  （2）坐标象限里复数的情形：首先根据复数点所在象限确定辐角主值的范围，然后  通过求解直角三角形求出角.  **例4**      **4. 复数和差的模的性质**  表示两个复数之间的距离，则有三角不等式    5.复数的三角表示和指数表示  利用直角坐标与极坐标的关系复数可以表示成三角形式：    其中利用实际应用中, 一般取  根据Euler公式 复数可以表示成指数形式：    **例5** 求 的三角形式和指数形式  **解**  故三角形式为 指数形式为  **§1.3 复数的乘幂与方根**  **一、乘积与商**  定理一 两个复数乘积的模等于它们的模的乘积; 两个复数乘积的辐角等于它们  的辐角的和.  定理二两个复数的商的模等于它们的模的商; 两个复数的商的辐角等于被除数  与除数的辐角之差.  **例6** 已知求  **解** 由有      **二、幂与根**  1. n次幂: n个相同复数的乘积称为的n幂，记作  对正整数，有    规定 当是负整数是时，上式也成立。  2. n次方根: 对于方程的根称为的次方根，记作  则有    其中  推导过程如下: 由于 设 则记已知, 且  记则有    等式两端同时取模, 有 在正实数意义下,有  在复数相等的意义下, 有 则有    把对应相同角的去掉，只保留不同的，有  由此得到上述公式.  **例7** 对正整数,化简  **解** 注意到  则有        **例8** 记方程的两个根为求的值  **解** 由题意有 注意到  所以  由此得    则 | | |
| **作业安排及课后反思:**  (1)归纳，总结重要概念，公式和方法. (2)第一章习题: 2,6,8,14,15. | | |
| **本课程使用教材：**P2-17 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第二讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 区域及复变函数 | 2/2 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、 熟悉区域、简单闭曲线等概念;  二、了解复变函数的概念及特点;  三、了解复变函数极限的概念及运算法则;  四、掌握复变函数连续的概念及性质. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、区域、简单闭曲线等相关概念;  二、复变函数的概念、性质;  三、复变函数极限;  四、复变函数连续性.  **重点:**  区域、简单闭曲线、复变函数、复变函数极限、复变函数的连续性等概念.  **难点:**  复变函数极限、连续的判别方法及运算法则. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| **§1.4 区域**  **一、区域的概念**  1. 邻域: 复平面上以复数点为中心，任意正实数为半径的圆内部所有  点的集合,称为的邻域.  说明 包括无穷远点且满足的所有点的集合，称为无穷远点的邻域.  2.去心邻域: 满足不等式所有点的集合,称为的空心邻域.  说明 不包括无穷远点 且满足的所有点的集合，称为无穷远点的空心邻域.  也表示为.  3.内点: 如果点存在一个邻域是平面点集的子集，则称是的内点.  4.开集: 如果内每一点都是它的内点， 则称为开集.  5.区域: 如果平面点集满足以下两个条件：  （1）是一个开集；（2） 是连通的，即中任何两点都可以用完全属于的一  条线连结起来，  则称为一个区域.  圆域:  圆环域: 都是常用的区域.  6.边界点、边界: 设是复平面内的一个区域,如果点不属于，但在的任意小  的邻域内总有中的点，这样的点称为的边界点. 的所有边界点组成的边  界.  说明 (1) 区域的边界可能是由几条曲线和一些孤立的点所组成的；  (2) 区域与它的边界一起构成闭区域.  7.有界区域和无界区域: 如果一个区域可以被包含在一个以原点为中心的圆内，即  存在，使区域内的每一个点都满足,称是有界的，否则称为无界的.  **二、单连通域与多连通域**  1. 连续曲线: 如果和是两个连续的实变函数，则称方程组：  表示的一条平面曲线为连续曲线.  平面曲线可以有复数表示：  2. 光滑曲线: 对于上述平面曲线，如果在上，和都是  连续的，且对的每一个值，有则称曲线为光滑的.  由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为逐段（分段）光滑曲线.  3. 简单曲线: 设是一条连续曲线，与分别称为  的起点和终点.  对于满足的有则称为曲线的重点.  没有重点的曲线称为简单曲线(或若尔当曲线).  如果简单曲线的起点和终点重合，即则称曲线为简单闭曲线（自  身不相交）.  简单闭曲线的性质:任意一条简单闭曲线将复平面唯一地分成三个互不相交的  点集.  4. 单连通域与多连通域的定义:  复平面上的一个区域，如果在其中任作一条简单闭曲线，而曲线的内部总属于  ，就称为单连通域. 一个区域如果不是单连通域，就称为多连通域.  **§1.5 复变函数**  **1. 复变函数的定义:**  设是复数的集合. 如果有一个确定的法则使得对集合中的每一个  复数, 都有一个或几个复数与之对应, 则称复变数是的函数,  简称复变函数，记作  **2. 复变函数的多值性:**  在复变函数中 如果一个对应着一个的值，则称函数是单值的; 如  果一个对应着两个或两个以上值，则称函数是多值的.  有多值的复变函数存在, 如  **3. 复变函数与实变函数之间的关系:**  任何复变函数总可以写成    因此一个复变函数对应于两个二元实变函数.  **4. 反函数的定义:**  对于复变函数如果是已知，需要去确定的值,这样就定义了一个新的数称为的反函数.  **§1.6 复变函数的极限和连续性**  **一、函数的极限**  1.函数极限的定义  设复变函数定义在的去心邻域内, 如果对任意给定的  存在一确定数和一正数使得当时，成立    则称为当趋向于时的极限. 记作    需要注意的是：在复平面上,的方式是任意的！  2. 极限的相关定理  定理一 设 则    定理的作用在于把复变函数的极限问题转化为求两个二  元实变函数的极限.  定理二 若 存在, 则        **例9** 设则当时，有  **证明** 由Euler公式, 有    根据定理一, 有    注意到是实数，则    即是有界量.  又当时, 即当时, 是无穷小量. 则有    所以当时,  类似的, 当时,  例如  **二、函数的连续性**  1. 连续的定义  如果 则称函数在点连续.  如果在区域内每一点都连续，则称在内连续.  定理三 函数在连续  在连续.  所有初等函数在有定义的点都是连续的！  定理四 （1） 在一点连续的两个函数的和、差、积、商（分母在  点不能为零）在点也连续。  （2）如果函数在点连续，函数在连续，则复合函数  在点连续.  重要结论:  (1)有理整函数(多项式)在复平面内所有点都连续；   1. 有理分式函数,其中都是多项式，在复平面内使分母不为零的点连续. | | |
| **作业安排及课后反思:**  (1)归纳，总结重要概念和结论. (2)第一章习题: 22,29,30. | | |
| **本课程使用教材：P17-29** | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第三讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 解析函数 | 2/3 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解复变函数导数的概念及求导方法;  二、掌握复变函数解析的概念以及确定奇点的方法;  三、掌握复变函数可导、解析的充要条件及条件的应用. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、复变函数导数的概念及求导方法;  二、复变函数可导、可微、连续的关系;  三、复变函数解析,奇点的概念及确定奇点的方法;  四、复变函数可导、解析的充要条件及充要条件的应用.  **重点:**  复变函数奇点的概念及确定具体函数奇点的方法.  **难点:**  复变函数与实变函数导数的差异及复变函数可导、解析的充要条件. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| **§2.1 解析函数的概念**   1. **复变函数的导数与微分**   1.导数的定义:  设复变函数定义在区域内,是内两点， 如果极限    存在, 则称在可导. 这个极限值称为在导数. 记作    在定义中应注意: 的方式是任意的.即在区域内  以任意方式趋于时，比值都趋于同一个复数值.  如果函数在区域内处处可导,则称在区域内可导.  **例1** 求的导数  **解** 对任意的 都有            所以对任意的 都可导,且有  **例2** 问是否可导？  **解** 函数的实部虚部 根据上一章的方法可知,实部和  虚部对任意都连续,则是复平面上的连续函数, 而且实部和虚部都是无穷  次可微函数, 由他们所构成的复变函数是否可导呢？  根据复变函数导数的定义, 有        首先设 沿着平行于轴的直线趋于 则有    再设沿着平行于轴的直线趋于 则有    由此表明，当沿着不同方式趋于时，极限值不同.由此可知，极限不存在.  所以函数在任意的导数不存在.  2.可导与连续:  函数在处可导则连续；但连续不一定可导.  **证** 根据可导定义知， 有    令 则有    这时    所以 即在连续.  3.求导法则:  由于复变函数中导数的定义与一元实变函数中导数的定义在形式上完全一致,并且  复变函数中的极限运算法则也和实变函数中一样, 因而实变函数中的求导法则都可  以不加更改地推广到复变函数中来, 且证明方法也是相同的.  **例3** 求导        4.微分的概念:  复变函数微分的概念在形式上与一元实变函数的微分概念完全一致.  函数可导可微.   1. **解析函数的概念** 2. 解析函数的定义:如果函数在以及的一个邻域内处处可导，则称在   解析.  如果函数在区域内每一点都解析, 则称在区域内解析，或称  是区域内的解析函数（全纯函数，正则函数).  2. 奇点的定义: 函数不解析的点，统称为的奇点.  根据定义可知: 函数在区域内解析区域内可导.  但是，函数在一点处解析与在一点处可导是不等价的.而函数在一点处解析比在该点  处可导的要求要高得多.  **例4** 研究函数解析性.  **解** 由本节例1和例3知: 在复平面内处处可导，也解析，而  处处不可导，也不解析.  下面从可导的定义开始来讨论的解析性.          (1) 若 则可导.  (2) 若假设 沿着直线趋于 则        由的任意性知，上式在时的极限不存在.因此,函数仅仅在可  导，而在其他点都不可导. 根据复变函数解析的定义可知，这个函数在复平面内处处  不解析.  定理 （1）在同一个点或区域内解析的两个函数的和、差、积、商（**除去分母为零的**  **点**）在该区域内解析；  (2) 两个解析函数的复合函数解析.  根据定理可知:  (1) 多项式函数在复平面内处处解析；  （2）有理分式函数在复平面内除了分母为零的点不解析以外，其余点都解析，  分母为零的点：是有理分式函数的奇点；  （3）一般分式函数的奇点由三部分构成： ①分子的奇点； ②分母 的奇点； ③分母的零点：  另外, 函数在简单闭曲线内解析函数在内没有奇点函数  的所有奇点在外.  **§2.2 函数解析的充要条件**  **一、主要定理**  由上一节例2可知，有些看起来可导的函数，严格应用导数的定义标准来验证，  发现却处处不可导，所以复变函数可导或解析所需要的条件较多，要求很高. 对于实  部和虚部已经分出来了，或者容易分出来的函数在判断可导或  解析时，有  定理一 定义在区域内的函数在点可导  在点 (1) 函数可微；⑵ 满足Cauchy-Riemann方程    定理必要性和充分性的证明.  在定理一的证明过程中可知，若函数在点可导,则有  导数公式：    定理二 定义在区域内函数解析  在区域内 ⑴ 函数可微；⑵ 满足Cauchy-Riemann方程.  判定函数解析的方法:   1. 如果直接用求导公式和求导法则在区域内求出了函数的导数，则根据解析函数   的定义可断定在内解析.   1. 对函数,如果在内的各一阶偏导存在且   连续，并满足Cauchy-Riemann（C-R）方程，则根据函数解析的充要条件可断定  在内解析.  **二、典型例题**  **例5** 判定下列函数在何处可导, 在何处解析:  (1)  (2)  (3)  **解** (1)  则有    由此可知,偏导存在且连续, 在任意点可微, 但是不满足柯西－  黎曼方程,故在复平面内处处不可导，也处处不解析.  (2) 则有    四个偏导数均处处存在且连续, 故可微, 而且也处处满足C-R方程. 则根据定理可  知，函数在复平面内处处可导，处处解析. 且由导数公式有    (3) , 则    四个偏导数均处处存在且连续, 故可微. 但是仅当时，满足C-R方程，故函  数仅在处可导，在复平面内处处不解析.  **例6** 如果在区域内处处为零，则在区域内为常数.  **证** 由已知条件    有 因此是常数，则在区域内是常数. | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| (1)归纳，总结重要概念和结论. (2)第二章习题: 3,4,6,10. | | |
| **本课程使用教材：**P35-44 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第四讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 初等函数 | 2/4 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、掌握几个常见初等复变函数的定义及计算公式;  二、掌握初等复变函数的主要性质;  三、掌握Euler公式及其应用. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、复指数函数的定义及性质;  二、复对数函数的定义公式、计算公式及解析性;  三、复三角函数的定义、性质;  四、Euler公式.  **重点:**  初等复变函数的定义、计算及解析性质.  **难点:**  复对数函数的解析性、复三角函数的计算. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| **§2.3 初等函数**  **一、指数函数**  1. 指数函数的定义:   1. 性质   加法定理:  周期性: 是任意整数.  解析性：在复平面解析.  **二、对数函数**   1. 定义 指数函数的反函数，即已知，求称为对数函数，记作:     由于对任意则已知的有指数形式    记未知的,则有    对上式两端取模，并注意到复指数函数的周期性, 有    注意到 可记 由此有    按照表示函数值和自变量所用字母的习惯，有对数函数    由此可知，是无穷多值函数.一般可取对数主值为    这时有  **例7** 求以及相应主值。  **解**    主值:  **例8** 求解方程  **解** 由      2. 性质  ⑴  ⑵  ⑶ 的各个分支在除去负实轴及原点的复平面内解析，且有    3. 典型问题  ⑴ 函数的奇点？  ⑵ 函数在圆内解析吗？  ⑶ 函数在单位圆内解析？  **三、三角函数和双曲函数**  1. 三角函数的定义 由有    把上述函数中的自变量推广到复数，有    2. 性质  ⑴ 根据定义，有 所以，不再成立，除非取  实值.  ⑵ 除了⑴与实值不同以外，复正弦函数和余弦函数具有实值时完全相同的性质，  比如  奇偶性：  周期性：  三角公式：  求导公式：  ⑶ 正弦和余弦函数在复平面内解析.求的奇点？  3. 其他函数的类似定义  ⑴ 正切，余切函数：  ⑵ 双曲正弦，余弦函数： | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| (1)归纳，总结重要概念和结论. (2)第二章习题: 12,15,18. | | |
| **本课程使用教材：**P45-51 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第五讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 积分概念及基本定理 | 2/5 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解复变函数积分的概念;  二、熟悉复变函数积分的性质;  三、掌握Cauchy-Goursat基本定理. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、复变函数积分概念及存在条件;  二、复变函数积分的性质;  三、直接计算复变函数积分的典型例题;  四、Cauchy-Goursat基本定理.  **重点:**  复变函数积分的性质、Cauchy-Goursat基本定理.  **难点:**  复变函数积分概念、Cauchy-Goursat基本定理. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| **§3.1 复变函数积分的概念**  **一、积分的定义**  1. 有向曲线:  设C为平面上给定的一条光滑(或按段光滑)曲线, 如果选定C的两个可能方向中  的一个作为正方向(或正向), 那么我们就把C理解为带有方向的曲线, 称为有向曲  线.  如果A到B作为曲线C的正向,那么 B到A就是曲线C的负向,记为  关于曲线方向的说明:  在今后的讨论中,常把两个端点中的一个作为起点, 另一个作为终点, 除特殊  声明外, 正方向总是指从起点到终点的方向.  简单闭曲线正向的规定: 如无特殊申明均是指逆时针方向为正方向.  2. 积分的定义:  设复变函数定义在区域内,是区域内起点为, 终点为的一条  光滑有向曲线.  (1) 曲线划分: 把曲线任意划分成个弧段, 分点依次记为    由此曲线被分成个弧段： 其长度为   1. 近似作和:在弧段中任取,有函数值 作近似乘积   然后作和:     1. 取极限：记当无限增加，且时，如果不论对的分法及   的取法如何，有唯一极限，则称这个极限值(复数值)为函数沿曲线的积分.  记为    如果是闭曲线，则沿此闭曲线的积分记为  关于定义的说明:   1. 如果是轴上的区间而这时复变函数的积分与一元实变函   数定积分的一致.   1. 根据定义，复变函数沿有向曲线的积分是否存在完全取决于极限   的存在性.  ⑶ 根据定义,如果积分存在，则是一个依赖于被积函数和积分曲线  的复数值.  **二、积分的性质**  根据复变函数积分的定义，容易得到下列性质:  ⑴ 积分曲线可分可加性：如果是由等光滑曲线依次首尾连接所组成的  逐段光滑曲线，即则    在等式中，由左到右称为曲线可分，由右到左称为曲线可加；  (2) 反向反号性：  ⑶ 被积函数线性性：对任意常数有    (4) 估值性：设曲线的长度为,函数在上满足则有估值不等式    **三、积分存在的条件及其计算法**  1. 存在的条件：如果复变函数在光滑曲线上连续，则积分存在.  2. 积分的计算方法: 在已知积分曲线参数方程的情况  下,积分可以通过两个二元实变函数的线积分来直接计算:            在以后的讨论中, 总假定积分是存在的.  **例1** 计算 从原点到点的直线段  **解：** 取直线参数方程为则  **例2** 计算 其中是以为圆心，为半径的正向圆周，为整数.  **解：**积分路径的参数方程为 代入积分表达式得      当时,  当时,  所以    **§3.2 Cauchy－Goursat基本定理**  第一节中介绍的计算复变函数积分的方法有很大局限，那就是必须要知道积分曲  线的参数方程，而且参数方程还得比较简单，否则转化出来的定积分很复杂.这会限  制积分的应用，也体现不出复变函数积分的优势.  从下面讲解的结论中可以发现，其实复变函数的积分和以前的积分比较起来更简  单.只要掌握好方法，计算起来更容易！  **Cauchy－Goursat基本定理**  如果函数在单连通区域内解析，则对内任何一条封闭曲线都有    简单证明：设函数则有    设封闭曲线围成的区域为，根据平面上封闭曲线积分的Green公式,有    由于函数在单连通区域内解析，根据函数解析的充要条  件知，在内成立Cauchy-Riemann方程:    由此有所以  定理也称为**Cauchy积分定理.**  在实际应用中，无论什么类型的复变函数, 只要其在积分曲线内解析（没  有奇点），而不论在外有没有奇点，都有 这样一来，复杂的复变函数  积分计算问题就转化为求被积函数的奇点和判断在积分曲线内有没有被积函数的奇  点了.  **例3** 计算积分  **解** 因为和都在积分曲线围成的区域内  解析，根据Cauchy－Goursat定理得          **例4** 设正向. 计算积分  **解** 被积函数的奇点包括: 分子是对数函数,奇点为正实轴上2右边所有点;分母是  多项式函数, 在复平面上没有奇点; 使分母为零的点:  即.由此可知, 分式函数所有这些奇点到原点的距离都不小于1, 所以都在  的外面,即在积分曲线内没有被积函数的奇点,或被积函数在积分曲线内解析.  所以根据Cauchy－Goursat定理有 | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| (1)归纳，总结重要概念、结论和方法. (2)第三章习题: 5,6. | | |
| **本课程使用教材：**P69-77 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第六讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 复合闭路定理 | 2/6 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解闭路变形原理;  二、掌握复合闭路定理的结论和方法;  三、了解复变函数原函数的概念及原函数的应用. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、闭路变形原理;  二、复合闭路定理;  三、复变函数的原函数;  四、用复变函数原函数方法计算积分.  **重点:**  复合闭路定理.  **难点:**  复合闭路定理、复变函数的原函数的存在条件. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| **§3.3 复合闭路定理**  **1. 闭路变形原理**  设函数在多连通域内解析，是该区域内任意两条正向简单闭曲线. 通过重新构造闭曲线, 根据Cauchy－Goursat定理可以证明: 只要在所的区域内解析, 则有    由于可以称是由连续变形而来, 一般称上述公式为闭路变形原理.实际应用中，  可以把沿不规则曲线C的积分计算转化为沿规则曲线，比如圆周的积分，以求简化.  **例5** 求其中为包含的任一简单闭曲线， 是整数.  **解** 因为在曲线内部，故可取很小的正数，使得圆周在的内部.  则被积函数在以为边界的复连通域内解析. 根据闭路变形原理，有    再根据3.1节的例题结果，有    **2. 复合闭路定理**  复合闭路：如果简单闭曲线满足条件： ① 在的内部； ② 互不包含；  ③ 互不相交，则称构成复合闭路，而且作为复合闭路的组成部分取  逆时针, 取顺时针为正向.记作    复合闭路定理：设是多连通区域内的复合闭路，并且以为  边界的区域全含于内.如果函数在以为边界的区域内解析，则  (1)  (2)  定理中的⑴也看成是Cauchy-Goursat基本定理的推广.  根据积分曲线的有限可分可加性和积分的反向反号性，容易知道⑴和⑵是等价.复合  闭路定理可以应用证明闭路变形原理同样的方法给予证明.  复合闭路定理的作用在于把积分曲线内含有被积函数多个奇点的积分转化成各个  只含有一个奇点的积分，然后求和.  **例6** 计算积分为包含单位圆周的任意正向简单闭曲线.  **解** 被积函数在复平面内的两个有限奇点都在积分曲线的内部.分别  以为中心，作适当小的两个正向圆周和使得构成复  合闭路.  根据复合闭路定理及Cauchy－Goursat基本定理，有            **§3.4 原函数与不定积分**  **1. 两个主要定理:**  **定理一** 如果函数在单连通域内处处解析，则积分与连接起点及终  点的路径无关。  记单连通区域内的积分曲线的起点为，终点为，则由定理一可知:  解析函数沿的积分只与起点和终点有关, 则可记    如果固定，在内变动，并令 则可确定内的一个单值函数.  **定理二** 如果函数在单连通域内处处解析，则是  内的一个解析函数，且  **证** 利用导数的定义来证. 设为内任一点，以为中心作一个含于内的小  圆，取充分小使得在内，由的定义，有    由于上述积分与路线无关，的积分路径可取为从沿与相同  的路径先到，然后再沿直线到.于是有    则  注意到 所以有        由在内解析知, 在内连续.故 时,上述积分  表达式中的积分变量在小圆内,此时 则有    根据积分的估值性质，有          于是有  则    所以  **2. 原函数的定义:**  如果函数在区域内的导数为 即 则称为 在  区域内的原函数.  显然是的一个原函数.  原函数之间的关系：的任何两个原函数相差一个常数.  **3. 不定积分的定义:**  称原函数的一般表达式（为任意常数）为的不定积分，记作:    **定理三 (类似于牛顿-莱布尼兹公式)**  如果函数在单连通域内解析, 是内的两点, 为的一个  原函数，则    说明: 根据上述公式,复变函数的积分可以用与微积分学中类似的方法去计算.  **例7** 求的值.  **解：**            此方法使用了微积分中“分部积分法” | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| (1)归纳，总结重要概念、结论和方法. (2)第三章习题: 8(1,4). | | |
| **本课程使用教材：**P77-84 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第七讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 积分公式 | 2/7 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、掌握Cauchy积分公式;  二、掌握解析函数的高阶导数公式;  三、了解调和函数的概念；  四、了解偏积分方法. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、Cauchy积分公式;  二、解析函数的高阶导数公式;  三、调和函数;  四、偏积分方法.  **重点:**  Cauchy积分公式、解析函数的高阶导数公式.  **难点:**  Cauchy积分公式、解析函数的高阶导数公式及偏积分方法. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| **§3.5 Cauchy积分公式**  一**、定理** 如果函数在区域内处处解析；为内的任意一条正向简单闭曲线，  的内部完全在内；是内任意一点，则有（Cauchy积分公式）    **证** 显然在连续，则 当时，有：    设以为中心, 半径为的正向圆周全在的内部.根据闭路变  形原理，有        根据积分估值性质, 有        上不等式表明，只要足够小，左端积分的模就可以任意小，根据闭路变形原理知，  左端积分的值与无关，所以只有在对所有的积分值为零时才有可能.故有    关于柯西积分公式的说明:  Cauchy积分公式成立需要满足三个条件：  ⑴ 被积函数是特殊的分式形式；  ⑵ 被积函数的分子须在积分曲线内解析，即在积分曲线内没有奇点，而不管在积分  曲线外有没有奇点；  ⑶ 被积函数分母的零点，也就是被积函数的唯一奇点必须在积分曲线内.  **二、典型例题**  **例8** 求积分  **解** 因为在复平面解析，被积函数的唯一奇点在积分曲线围成的  区域内，根据Cauchy积分公式，有    **例9** 计算积分  **解** 由于 可取则  在积分曲线围成的区域内解析，被积函数在积分曲线内有唯一奇点  根据Cauchy积分公式，有    **例10** 求积分  **解** 被积函数在积分曲线内有两个奇点 现分别以这两个奇点为中  心，适当小的正实数为半径作两个正向圆周和  则根据复合闭路定理有    注意到积分中被积函数的分子在  积分曲线内解析; 分母在内有唯一零点.因此积分满足Cauchy积分公式应用的  条件.根据Cauchy积分公式，有    同理也有    所以有    根据Euler公式，有 所以有    **§3.6 高阶导数**  **一、主要定理**  **定理** 解析函数的导数仍然解析，在点的阶导数为    其中为在函数的解析区域内围绕的任意一条正向简单闭曲线.  高阶导数公式的作用：不在于通过积分来求导， 而在于通过求导来求积分.  **二、典型例题**  **例11** 计算下列积分:  (1)  (2)  其中为正向圆周：  **解** （1）被积函数在积分曲线内有唯一奇点 分子在内解析.  根据解析函数高阶导数公式，有    （2）被积函数在积分曲线内有两个奇点.在内分别以为中  心,适当小正数为半径,作正向圆周使得构成复合闭路.则函数  在由围成区域内解析.  根据复合闭路定理，有    注意到    被积函数在内只有一个奇点分子在内解析.  根据解析函数高阶导数公式, 有            被积函数在内只有一个奇点分子在内解析.  根据解析函数高阶导数公式, 有          根据Euler公式，于是有        Cauchy积分公式 和解析函数高阶导数公式    的总结：   1. 都是对分式函数，不一定是有理分式函数，的积分； 2. 积分曲线都是复平面内任意简单正向闭曲线；   ⑶ 被积分分式函数的分子都必须在积分曲线围成区域内解析被积函数在积分曲围成区域内没有奇点被积函数如果有奇点，奇点都在积分曲线外部；  (4) 被积分式函数分母的唯一零点，是被积函数在积分曲线围成区域内的唯一奇点；  **§3.7 解析函数与调和函数的关系**  **一、调和函数的定义**  定义 如果二元实变函数在区域内具有二阶连续偏导，并且满足Laplace  方程    则称是区域内的调和函数.  调和函数在流体力学和电磁场理论等实际问题中有很重要的应用.  **二、解析函数与调和函数的关系**  1. 两者的关系  定理 任何在区域 D 内解析的函数,它的实部和虚部都是内的调和函数.  2. 共轭调和函数的定义  设是区域内给定的调和函数，则称使在内构成解析数的为的共轭调和函数.即区域D内的解析函数的虚部为实部的共轭调  和函数.  3. 偏积分法  已知解析函数的实部或虚部函数,可以根据C-R方程，通过  积分求得另外一个.这种方法称为偏积分法.  **例10** 证明 是调和函数，并求其共轭调和函数及由它们  构成的解析函数.  **解** 由可知, 函数二阶偏  导存在且连续, 而且满足Laplace方程    故是调和函数.  由解析, 根据解析函数的充要条件可知, C-R方程    成立, 则有    积分第一个式子得    其中是任意一阶可导且连续函数. 由可知,  所以 其中是常数. 则有 | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| (1)归纳，总结重要概念、结论和方法. (2)第三章习题: 14,21,31. | | |
| **本课程使用教材：**P84-95 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第八讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 复数项级数 | 2/8 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解复数列收敛的概念和求法;  二、掌握复数项级数收敛的概念和求法;  三、了解幂级数的概念；  四、掌握幂级数收敛半径和收敛圆的求法. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、复数列;  二、复数项级数;  三、幂级数;  四、幂级数收敛半径和收敛圆.  **重点:**  复数项级数收敛性、幂级数收敛半径和收敛圆.  **难点:**  复数项级数收敛性、幂级数收敛半径和收敛圆. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| **§4.1 复数项级数**  **一、复数列的极限**  1. 定义 设是一复数列，而是一确定复数.如果对  任意给定的，都存在相应的正整数，使得对所有，都有，  则称为复数列当时的极限，记作    此时也称复数列收敛于.  2.复数列收敛的充要条件  定理1  由此说明，复数列的敛散性问题可以等价转化为判别两个实数列的敛散性.  **例1** 证明：当时，  **证**：当时，结论显然成立.当时，有    根据复数列数列的判别方法，有    注意到对辐角和任意有 而在时，是无穷小量，因  此有    根据复数列数列的充要条件，有    **二、级数的概念**  1.定义设 是一复数列，表达式    称为复数项无穷级数. 其前项的和称为这个级数的部分和. 如  果复数项级数的部分和数列收敛，则称级数收敛，此时数列极限  称为级数的和. 如果部分和数列不收敛，则称级数发散.  **例2** 级数的敛散性  注意到级数的部分和由于在时，有  因此    所以当时，级数收敛.  2.复数项级数收敛的条件  定理2 设, 级数收敛都收敛.  级数收敛的必要条件  由实数项级数收敛的必要条件有复数项级数收敛的必  要条件为  定理3 收敛收敛，且有  注意:（1) 这只是判别复数项收敛的充分条件;  (2) 对应该应用正项级数的审敛法则判定.  3. 绝对收敛与条件收敛  定义 如果收敛，则称级数绝对收敛，不是绝对收敛的收敛级数，称为  条件收敛级数.  **例3** 级数是否绝对收敛？  **解** 由正项级数的比值判别法知：收敛, 根据定理3知, 原级数收  敛, 且是绝对收敛.  **例4** 级数的敛散性  **解** 由知，级数收敛的必要条件满足. 但是, 调和级数发散，  应用定理3判断此级数的敛散性失效. 注意到    应用Leibniz法则可知，实部和虚部对应的两个交错级数都收敛. 根据定理2知，级  数收敛，且是条件收敛.  **§4.2 幂级数**  **一、幂级数的概念**  1.复变函数项级数  定义设为区域内的一复变函数序列. 表达式    称为复变函数项级数, 记作. 级数最前面项的和    称为这级数的部分和.  **和函数** 如果对于内的某一点,极限存在, 则称级数  在收敛, 称为它的和.  如果级数在内任意点都收敛, 那末它的和    是的一个函数, 称为该级数在区域上的和函数.  2. 幂级数  当或时, 有函数项级数的特殊情形    或    这种级数称为幂级数.  **二、幂级数的敛散性**  1.收敛定理(阿贝尔Abel定理)  如果级数在收敛，则对满足的任意,级数必绝对收敛；  如果级数在发散, 则对满足的任意, 级数发散.  2. 收敛圆与收敛半径  根据阿贝尔Abel定理可知, 幂级数的收敛范围是以原点为中心的圆域,  圆域半径称为收敛半径.  3. 收敛半径的求法  比值法**：** 根值法：  则收敛半径  **例5** 求下列幂级数的收敛半径:  (1) (并讨论在收敛圆周上的情形)  (2)  (并讨论时的情形)  **解** （1）由知，收敛半径，则级数在圆内  收敛，在圆外发散. 在圆周上，级数是收敛的级数  . 根据复级数收敛的充分条件（定理3）知，原级数在收敛圆周上处处绝对  收敛.  (2) 由有，收敛半径.  当时，原级数成为，是收敛的交错级数;  当时, 原级数成为，是发散的调和级数.  一般来说，幂级数在收敛圆周上既有级数的收敛点, 也有级数的发散点. 而在应用  中, 圆周内是可以确保收敛的. | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| (1)归纳，总结重要概念、结论和方法. (2)第四章习题: 2,3(2,4),6(1,3,5) | | |
| **本课程使用教材：**P105-114 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第九讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 幂级数 | 2/9 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解幂级数的运算方法;  二、掌握幂级数的性质;  三、了解函数的Taylor展开定理；  四、掌握函数Taylor展开的方法. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、幂级数的运算;  二、幂级数的性质;  三、Taylor展开定理;  四、函数Taylor展开.  **重点:**  幂级数在收敛圆内的性质、解析函数的Taylor展开.  **难点:**  解析函数的Taylor展开. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| **三、幂级数的运算和性质**  1.幂级数的有理运算  设 则    2. 幂级数的代换(复合)运算  3. 复变幂级数在收敛圆内的分析性质  定理四 设幂级数的收敛半径为,则   1. 和函数 在收敛圆内解析；   (2) 收敛圆内可逐项求导：    (3) 收敛圆内逐项求积：    **§4.3 Taylor级数**  **一、 Taylor展开定理**  **定理** 设函数在区域内解析，为内任一点，为到的边界上各点的  最短距离，则当时，有的Taylor展开式:    等式右边的级数称为Taylor级数**.**其中称为Taylor系数.  **二、将函数展开成Taylor级数**  1.直接法: 直接计算系数,然后根据展开定理把函数  在展开成幂级数.  **例6**，求在 的Taylor展开式  因在复平面内解析，所以展开成幂级数的收敛半径. 注意到    由此得到基本展开式    2. 间接展开法 : 利用一些已知函数的展开式 , 结合解析函数的性质, 幂级数运  算性质 (逐项求导, 积分等)和其它数学技巧 (代换等), 求函数的泰勒展开式. 其  优点是：不需要求各阶导数与收敛半径. 因而比直接展开更为简洁,使用范围也更为  广泛.  **例7** 根据Euler公式和指数函数的基本展开式,有          **三、常见函数的Taylor展开式**  **四、函数的Taylor展开**   1. 有理分式函数、对数函数的展开.   以基本幂级数 为基础, 利用函数代换以及  收敛圆内幂级数的各种分析性质, 得到函数的Taylor展开式.  **例8** 把函数展开成的幂级数.  **解** 函数展开的中心点为 可以先确定函数展开的范围.  需要展开的函数的奇点为,此奇点到展开中心点的距离,根据展开定  理知， 函数可在内展开成的幂级数.  由基本幂级数有    对上式两边求导，且右边逐项求导，由此得到展开式    则有    **例9** 求对数函数的主值在的展开式.  **解** 由函数奇点的分布可知, 在内有展开式.  注意到    将上式从到任意积分，对右边级数逐项积分，有    由此得到    **例10** 把函数展开成的幂级数.  **解** 由函数奇点可知, 在内有展开式.  .  2. 指数函数、三角函数的展开.  以基本幂级数为基础, 利用函数代换  以及收敛圆内幂级数的各种分析性质, 得到指数函数的Taylor展开式.三角函数可以  利用Euler公式先转化成指数函数, 然后再按照指数函数展开.  **例11** 求函数在的幂级数.  **解** 根据三角公式和Euler公式, 有          所以有    根据指数函数的基本展开式, 有    所以有    注意到      则有        所以有 | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| (1)归纳，总结重要概念、结论和方法. (2)第四章习题: 11(2,4,6),12(2,4,6) | | |
| **本课程使用教材：**P114-124 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第十讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| Laurent级数 | 2/10,11 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解双边幂级数的概念;  二、了解双边幂级数的性质;  三、了解函数的Laurent展开定理;  四、掌握函数Laurent展开的方法. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、双边幂级数;  二、双边幂级数的性质;  三、Laurent展开定理;  四、函数Laurent展开.  **重点:**  Laurent展开定理、函数的Laurent展开.  **难点:**  函数的Laurent展开. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| **§4.4 Laurent级数**  **一、双边幂级数**  1. 双边幂级数及其收敛域    称为双边幂级数, 或含有负幂项的幂级数, 其中正幂项部分也称为解析部分,负幂  项部分称为主要部分.  当正幂项部分和负幂项部分同时收敛时, 双边幂级数才收敛, 由此得到结论：若  双边幂级数收敛，则收敛域为圆环域.  2. 双边幂级数收敛域内的性质：  若双边幂级数在圆环域内收敛，则  （1) 和函数在收敛的圆环域内解析；  （2） 收敛圆环域内可逐项求导：  （3） 收敛圆环域内可逐项求积.  **二、 Laurent级数**  1. Laurent展开定理:若函数在圆环域内解析，则函数在此圆  环域内可展开成**Laurent**级数    其中称为**Laurent系数，**积分曲线是圆环域内的任一正向简单闭曲线.  2. Laurent 级数与Taylor 级数的关系  1）若函数不仅在环域内解析，也在环域的内圆内解析，则  Laurent展开得到的实际上是Taylor级数；因为在此条件下， Laurent系数的积分  计算公式    中，被积函数的分子在解析，则也在积分曲线C围成区域内解析.  当时，是复平面内解析的多项式函数，  所以在C内函数 解析.则根据**Cauchy－Goursat基本定理，**有    所以Laurent展开式中没有负幂项.  当时,根据解析函数的高价导数公式有    则有Taylor展开式     1. 若函数仅在环域内解析，在环域的内圆内有奇点，则   Laurent展开时,一般会得到真正的Laurent 级数.  这种情况下也可能没有负幂项, 例如：  由于在时有    则在上式也成立. 在此环域内有Laurent展开式    其他函数如等在环域内的Laurent展开式也没有负幂项.  在判断出Laurent 级数含有负幂项时，原则上只要对负幂项作倒数变换，变换  成正幂项的幂级数，就可以根据一般间接展开法求得.  **三、函数的Laurent展开式**  1. 直接展开法：利用定理中的公式    计算Laurent系数,然后得到Laurent展开式.  缺点: 计算往往很麻烦.  2.间接展开法：根据正、负幂项组成的的Laurent级数的唯一性, 可利用已知函数  的展开式得到Laurent展开式.  优点 : 简捷,快速.  **四、典型例题**  **例12** 在内，把函数展开成Laurent级数.  **解** 由基本幂级数    有  .  在内, ,在上式两端同除以,有    **例13** 函数在圆环域  (1) , (2) , (3)  内解析的，试把在这些区域内展开成Laurent级数.  **解** 首先有  1）在时,有，则根据基本幂级数,有      所以      2）在内, 由于,根据基本幂级数,有    由于,根据基本幂级数,有    所以      3） 在内，由于,根据基本幂级数,有    由于,根据基本幂级数,有    所以      为了得到函数的Laurent级数，也会应用级数的分析性质等多种方法.  **例14** 求函数在圆环域内的Laurent展开  **分析**： 函数在圆环域内的Laurent展开应该具有形式    所以，可先得到在内的Laurent展开，然后在展开式两端同除以  即可.  **解** 根据基本幂级数,有    上式两端求导，右端级数逐项求导，有    则有    在内, , 则上式两端同时除以有函数的Laurent展开 | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| (1)归纳，总结重要概念、结论和方法. (2)第四章习题: 16(1,3,5) | | |
| **本课程使用教材：**P124-135 | | |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **第十一讲** | | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** | |
| 孤立奇点 | | 2/12 | 2015-16/2 | |
| **教学目标** | | | | |
| 一、了解孤立奇点的概念;  二、了解孤立奇点的分类方法;  三、掌握判断函数极点级数的方法. | | | | |
| **教学内容** | | | | |
| **知识点：**  一、孤立奇点;  二、孤立奇点的分类;  三、函数零点;  四、函数极点.  **重点:**  判断函数极点级数.  **难点:**  函数零点及极点级数. | | | | |
| **教学过程及教学方法** | | | | |
| **§5.1 孤立奇点**  **一、孤立奇点的概念**  1.定义：若是函数 的有限奇点，但在的某一空心邻域函数解  析, 则称是的孤立奇点.  **例1** 是函数的孤立奇点; 而是函数的孤立奇点.  有理分式函数的所有有限奇点都是孤立奇点.  注意: 存在不是孤立奇点的奇点，如的所有奇点都不是孤立奇点.  **例2** 讨论函数在的奇点特性  **解：**函数的奇点为    由于则在的不论多么小的空心邻域内，总有函数的其他奇点,所以  不是孤立奇点.  2.孤立奇点的分类  如果是函数的孤立奇点. 由孤立奇点的定义知，函数在一个空心邻域  内解析.  现在把这个空心邻域看成环域, 根据Laurent展开定理可知, 在此邻域内有函  数的Laurent展开式    根据函数的Laurent展开式中含有负幂项的个数情况，可以把孤立奇点分为  **可去奇点**、**极点和本性奇点**三类.  1)．可去奇点如果函数在孤立奇点的空心邻域内的Laurent  级数不含的负幂项,则称孤立奇点为的可去奇点.  **例3** 函数在孤立奇点的任意空心邻域内的Laurent级数    中不含的负幂项, 所以是可去奇点.  **例4** 说明为 的可去奇点.  **解** 在此孤立奇点的任意空心邻域内, 函数的Laurent级数    所以是的可去奇点.  2). 极点如果函数在孤立奇点的空心邻域内的Laurent级数  含有的有限多个负幂项，其中关于 的最高方幂为 则称是函  数的级极点. 即    在上式两端同乘，则有    上式右端级数在内收敛，显然在也收敛，所以右端级数在  内收敛. 根据幂级数收敛圆内的分析性质可知, 上式右端幂级数收敛于一  个解析函数, 设为.容易看出:  由此可得函数级极点的等价定义:  对函数, 若存在在点的某一领域内解析，且的函数,  使得    则是的级极点.  **例5** 是有理分式函数的孤立奇点, 令,  则在的邻域内解析,且,所以是  的二级极点.同样可知, 是的一级极点.  3).本性奇点如果函数在孤立奇点的去心邻域内的Laurent级  数含有的无穷多个负幂项, 则称是函数的本性奇点.  **例6** 由可知, 是函数的本性奇点.  **二、函数的零点与极点的关系**  1.零点的定义：不恒等于零的解析函数，如果能表示成    其中 ①在的某个邻域内解析, ②，则称为的级  零点.  **例7** 是函数的一级零点，是二级零点.  2.零点级数的判定  ⑴ 是解析函数的级零点的充要条件：     1. 如果函数在的某一邻域内的Taylor展开式中的最低方   幂项是,即    则是的级零点.  方法(2)主要用于判断零点的级数, 而⑴可以用于更一般的零点级数.  **例8** 的零点是满足方程: 的所有根    由于, 所以这些零点都是函数的一级零点.  由常见函数的Taylor展开式容易判断出函数零点级数.  3.零点与极点的关系  **定理:** 是函数的级零点是的级极点.  在具体判断函数极点的级数时，更常应用下面两个结论提供的方法.  **结论1：**若分别是函数的 级零点，则是乘积函数的  级零点.  例如，由于分别是函数的3级和2级零点，则是函数  的5级零点.  **结论2：**若分别是函数的级零点， 则  ⑴ 当时，是的可去奇点；  ⑵ 当时，是的级极点.  **例9** 由于分别是分式函数分子和分母的1级零点，则是这个分式函数  的可去奇点；而是分母的2级零点，不是分子的零点，但可以看成是分子的0级  零点，所以是分式函数的2级极点.  **例10** 分别是分式函数分子和分母的2级, 4级零点，所以是分  式函数的2级极点.  **三、函数在无穷远点的性态**  定义 如果函数在无穷远点的某一个去心邻域内解析，则称  为的孤立奇点.  一般方法: 作倒数变换,则  结论: 去心邻域内对函数的研究在去心邻域内对  的研究.  规定: 如果是的可去奇点、级极点或本性奇点, 则称是的可  去奇点、级极点或本性奇点.  **例11** 函数在扩充复平面内有些什么类型的奇点? 如果是极  点, 指出它的级. | | | | |
| **作业安排及课后反思** | | | | |
| (1)归纳，总结重要概念、结论和方法. (2)第五章习题: 1(1,4,7),2,4,6(2) | | | | |
| **本课程使用教材：**P145-153 | | | | |
| **第十二讲** | **课时/课次:** | | | **教学日期（学年/学期）** |
| 留数 | 2/13 | | | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | | | |
| 一、了解留数的概念;  二、掌握留数定理;  三、掌握留数的计算规则;  四、掌握应用留数方法计算复变函数的积分. | | | | |
| **教学内容** | | | | |
| **知识点：**  一、留数的概念;  二、留数定理;  三、留数的计算规则;  四、留数方法计算函数积分.  **重点:**  留数方法计算复变函数的积分.  **难点:**  留数概念的引入、留数方法计算复变函数的积分. | | | | |
| **教学过程及教学方法** | | | | |
| **§5.2 留 数**  **一、留数概念的引入**  若是函数的孤立奇点, 根据孤立奇点的定义可知, 在的某一个空心邻  域内,函数解析. 把空心领域看作圆环域,则根据  Laurent展开定理知,在此空心邻域内存在函数的Laurent级数  设是内包含的任一条正向简单闭曲线，则可以沿对上述Laurent  展开式两端积分. 根据级数在收敛域内的分析性质, 则有      对上式右端的无穷多个积分, 首先根据解析函数高阶导数公式有    再根据Cauchy-Goursat基本定理, 有    所以上式右端无穷多个积分的值为, 则有    由此可知, Laurent级数中负幂项的系数  .  **定义** 若是函数的孤立奇点，则沿在的某个空心邻域 内包  含的任意一条正向简单闭曲线的积分除以后所得的值,称为  在点的留数. 记作    由此有    **二、利用留数求积分**  **1.留数定理：**函数在一条正向简单闭曲线内有有限多个孤立奇点  则    **证** 根据复合闭路定理和留数的定义容易证得.  **2.留数的计算方法**  (1) 如果是的可去奇点, 则  (2) 如果是的本性奇点，则需把展开成Laurent级数,然后由系数得  到   1. 如果是的极点,   规则1 是的极点, 则    规则2 是的级极点, 则    **证明:** 由是函数的级极点可知, 在的空心邻域内存在  的Laurent展开式:    其中所有Laurent系数待定.  为了确定有价值的,在空心邻域内, 上式两端同乘以,有    在上式两端同求阶导数, 得到      在上式两端令,取极限可得    由于 所以有    注意到当是函数的级极点时, 有    其中在的某个邻域内解析. 根据解析函数的导数定理,有    也是此邻域内的解析函数, 所以    即上述等式左端的极限实际上是一个解析函数的函数值.  **三、在无穷远点的留数**  1.定义设函数在圆环域内解析，为圆环域内绕原点的任何一条正  向简单闭曲线，则积分的值与无关，称此值为在点的留  数，记作    2.定理二 如果函数在扩充复平面内只有有限个孤立奇点，则在包括点  在内的所有奇点的留数总和必等于零.  **证** 设是函数的所有有限孤立奇点,而是足够大,能够把这些  孤立奇点都包含在内部的正向简单闭曲线，则根据积分性质有    由无穷远点留数定义有    又由留数定理有    所以有    定理表明：  计算积分计算无穷远点的留数.使计算积分进一步得到  简化.  3.在无穷远点处留数的计算  **规则4**  **例12** 求留数  **解** 根据留数**规则4，**有    根据留数**规则2，**有          所以有    **例13** 求积分, 其中为正向圆周：  **解** 令,则在积分曲线内分别是的一级和二级极点.  则根据留数定理，有    根据留数计算规则, 有      所以有 | | | | |
| **作业安排及课后反思** | | | | |
| (1)归纳，总结重要概念、结论和方法. (2)第五章习题: 8(2,3),9(2,4,6) | | | | |
| **本课程使用教材：**P153-163 | | | | |
|  | | | | |
|  | | | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第十三讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 留数应用 | 2/14,15 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解留数的概念;  二、掌握留数定理;  三、掌握留数的计算规则;  四、掌握应用留数方法计算复变函数的积分. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、留数的概念;  二、留数定理;  三、留数的计算规则;  四、留数方法计算函数积分.  **重点:**  留数方法计算复变函数的积分.  **难点:**  留数概念的引入、留数方法计算复变函数的积分. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| **§5.3 留数在定积分计算上的应用**  **一、形如 的积分**  **思想方法 :** 把定积分化为一个复变函数沿某条封闭曲线的积分.  **两个重要工作:** 1）积分区域的转化; 2） 被积函数的转化.  对**,**令, 则在此变换下有    根据Euler公式, 有  **,**  则有理三角函数可以化成的有理分式函数    从增加到的积分转化成沿单位圆周的正方向绕行一周.  所以有理三角函数的积分转化成有理分式函数沿单位圆周的积分:    对于有理分式函数沿单位圆周的积分, 又可以利用留数方法计算.  设是上述复变函数积分中被积函数在单位圆周内的所有奇点,  根据留数定理方法,有    所以有    **例14** 计算积分  **解** 由于参数,被积函数的分母  ，  故积分有意义.  令, 则    根据Euler公式, 有  则        被函数有三个极点,但在圆内只有一级极点和二级极点  因此，根据留数定理，有    根据留数计算规则，有              所以      因此    **二、形如的积分**  若有理函数的分母至少比分子高两次，并且分母在实轴上无孤立奇点，即    其中是常数, 且无实根.  则根据高数中无穷限广义积分的理论可知,存在.  相应记    积分的计算，可以转化为对构造合适的封闭曲线的积分，这样的方  法称为**“围道积分法”.**  以原点为中心 , 取适当大的数为半径，在上半平面作半圆周,使得所  有在上半平面内的极点都在此半圆周内.  记半圆周和轴上从点到的线段构成的封闭曲线为取正向.  再以为半径, 在上半平面作另一个半圆周，类似形成的封闭曲线记为  ⑴ 根据闭路变形原理，有    所以只要半圆周半径足够大, 积分与半径无关.  (2) 根据留数定理, 有    (3) 由积分曲线的有限可分可加性，有    注意到在轴上, 则    所以有    (4) 现在讨论积分.注意到      由此有      由于, 所以对足够大的, 当时, 总有    同理也有    于是有    又因为,所以    则有    ⑸ 在上述不等式中,令, 有 即    另外有    对(3)得到的等式两端令,则有    **例15** 计算积分  **解** 令,则函数在上半平面有一个二级极点.  由积分计算公式有  .  根据留数计算规则，有          所以    **三、形如 的积分**  积分存在条件: 有理分式函数分母的次数至少比分子的次数高一次, 并且  在实轴上无孤立奇点.  采用和前面类似的方法,可以推导出    其中是函数在上半平面内的所有奇点.  根据Euler公式, 有    **例16** 计算积分  **解**. 首先注意到  针对被积函数, 令,则在上半平面只有一个二级极点.  根据留数计算规则，有                所以有    则    所以 | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| (1)归纳，总结重要概念、结论和方法. (2)第五章习题: 13(2,4,6) | | |
| **本课程使用教材：**P163-171 | | |

# 8．课程学习要求

8.1学生自学的要求：

1．按老师指定内容自学（课前预习、课后归纳整理知识，复习重难点）

2．按自己实际学习状况加强练习

8.2课外阅读的要求：

多看老师指定参考书籍，认真完成课堂布置的课外作业题。

8.3课堂讨论的要求

积极思考，积极提问，积极回答

# 9．课程考核方式及评分规程

9.1出勤（迟到、早退等）、作业、报告等的要求：

出勤：缺一次扣平时成绩3分,迟到、早退扣平时成绩2分，事假扣平时成绩1分。

作业：全批全改，用A、A-、B、B-四个等级，分别表示90-100、80-89、70-79和60-69。

9.2成绩的构成与评分规则说明：

没有期中考试时：平时成绩占40%，期末卷面成绩占60%折算成学科成绩。

有期中考试时：平时成绩占30%，期中卷面成绩占30%，期末卷面成绩占40%折算成学科成绩。

9.3考试形式及说明（含补考）

平时以出勤和作业为主，期末卷面分A、B卷，难度相当，题型与分值相同，重复率不超过15%，任选一套作期末试卷，另一套作补考试卷

# 10．学术诚信规定

10.1考试违规与作弊

严格遵守并执行学校《学生手册》

10.2学术剽窃等

遵守知识产权，除非教师有特别要求，否则所有的作业、论文等都应学生本人自己完成。

# 11．课堂规范

11.1课堂纪律

遵守学校学生手册和行为规范。

11.2课堂礼仪

课堂教学是人才培养的重要环节，课堂是大学生接受教育的神圣殿堂。良好的课堂行为规范，是大学生素质的重要体现，是大学生良好精神风貌的重要体现，是高校学风建设的关键。

（1）学生应认真完成每一堂课的各个教学环节，至少提前十分钟到达上课地点；

（2）学生应自觉遵守和维护课堂纪律，上课期间应关闭手机、MP3等通讯和娱乐设备；禁止在教室内及附近大声喧哗；

（3）为保证一个清新的课堂教学环境，不得携带食物、饮料等进入课堂食用，不得在教室内吸烟；

（4）学生在课堂上应举止言行得体，不得有不文明的言语和举动；男女同学之间交往应得体，不得在课堂内表现出不雅言行；

（5）学生在课堂上应尊重老师，未经老师许可，不得随意进出教室或做出其他不雅举止，课间值日生应主动为老师擦黑板；

（6）为保持清洁的教学环境，学生应自觉维护教室内及走廊卫生，不得在课桌、教室墙壁等处涂抹刻画，不得在教室及走廊随地吐痰或乱扔杂物；

（7）学生应保持良好的个人形象，自觉遵守作息时间，保证上课精力充沛、精神饱满，禁止上课睡觉；课堂着装应得体，不得穿拖鞋、背心上课，不宜过度暴露。

（8）学生应根据课程教学安排认真完成课前预习、课堂笔记、课后作业。课堂上应积极参与讨论，认真回答问题，不做与课堂教学无关的事情。

（9）严格按课程表出勤，不迟到，不早退。认真对待教师课堂考勤，答到时应举手示意，声音响亮，不得替他人答到。

（10）不得旷课，因病因事不能正常出勤者应履行有关请假手续。

# 12．教学合约 我已阅读此课程实施大纲，理解其含义，并会遵照其中的要求和规定

# 完成课程。     学生签字\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# 