四川理工学院课程实施大纲

|  |
| --- |
| **课程名称：数理方程与特殊函数** |
| **授课班级：2014级电科1,2班** |
| **任课教师：雷远明** |
| **工作部门：理学院工程数学中心** |
| **联系方式：13890093560** |

**四川理工学院 制**

**2016年3月**

**《数理方程与特殊函数》课程实施大纲**

**基本信息**

|  |
| --- |
| 课程代码：10001307  课程名称： 数理方程与特殊函数  学 分：2  总 学 时：30学时  学 期：2015-2016学年第2学期  授课班级：2014级电科1,2班  任课教师：雷远明  学 院：理学院  邮 箱：www.leiyuanming@126.com  联系电话：13890093560 |

**目 录**

1. 教学理念……………………………………………………………………5

2. 课程介绍……………………………………………………………………5

3. 教师简介……………………………………………………………………5

4. 先修课程……………………………………………………………………5

5. 课程目标……………………………………………………………………5

6. 课程内容……………………………………………………………………5

6.1 课程内容概要………………………………………………………………5

6.2教学重点、难点……………………………………………………………6

6.3学时安排……………………………………………………………………6

7. 教学实施……………………………………………………………………6

7.1教学单元一…………………………………………………………………6

7.2教学单元二 ………………………………………………………………13

7.3教学单元三 ………………………………………………………………16

7.4教学单元四 ………………………………………………………………25

7.5教学单元五 ………………………………………………………………31

7.6教学单元六 ………………………………………………………………33

7.7教学单元七 ………………………………………………………………43

7.8教学单元八 ………………………………………………………………47

7.9教学单元九 ………………………………………………………………52

7.10教学单元十………………………………………………………………56

7.11教学单元十………………………………………………………………58

7.12教学单元十………………………………………………………………61

7.13教学单元十………………………………………………………………66

7.14教学单元十………………………………………………………………69

7.15教学单元十………………………………………………………………73

8. 课程学习要求 ……………………………………………………………76

9. 课程考核方式及评分规则… ……………………………………………76

10. 学术诚信规定……………………………………………………………77

11. 课堂规范…………………………………………………………………77

12. 教学合约及学生签名确认………………………………………………78

**1．教学理念**

展示知识的产生、发展过程;强调基本概念、基本理论、基本方法的掌握;注重数学计算能力、学习能力的提高.

**2．课程介绍**

《数理方程与特殊函数》是工科类学校部分专业的基础专业课程. 课程内容丰富,方法性强,理论比较复杂. 数理方程的基本理论和方法是学生后续专业课程学习的基础和工具. 学习好数理方程的理论和方法, 对于进一步的学习和研究有十分重要的意义和作用.

**3．教师简介**

3.1教师的职称、学历: 讲师, 研究生学历.

3.2教育背景: 本科在四川大学数学系学习数学基础理论和知识,硕士研究生阶段在复旦大学数学研究所学习和研究偏微分方程的基本理论和相关问题.

3.3研究兴趣（方向）:偏微分方程中有很强实际应用背景的双曲型方程解的存在性、奇异性等问题的研究.

**4．先修课程:** 高等数学

**5．课程目标**

通过本门课程的学习, 掌握数理方程的基本概念、基本理论、基本方法, 进一步提高数学的学习能力、计算能力和应用能力.

**6．课程内容**

**6.1课程的内容概要:** 常见数理方程的推导,定解条件和定解问题的概念和类型; 分离变量法的思路、方法和应用; 特征变换法及积分变换法求解发展型方程的初值问题; Laplace方程第一类边值问题求解的Green函数法; bessel方程的导出及求解, bessel函数的概念及性质, bessel函数的应用; Legendre方程的导出及Legendre方程的求解, Legendre多项式的概念及性质, 函数的Legendre多项式展开.

**6.2教学重点、难点:** 三种基本类型数学物理方程各种定解问题的求解方法是课程的重点,也是是课程教学的难点.

**6.3学时安排:** 30学时

**7.课程实施**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第一讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 基本方程的建立 | 2/1 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、初步了解数学物理方程的来源;  二、认识单个方程的有关概念;  三、认识数理方程的三种基本类型及简单背景. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、弦振动方程的推导;  二、波动方程的识别特征;  三、方程的相关概念;  四、Laplace方程、热传导方程的简单推导.  **重点:**  数理方程相关概念的了解和认识.  **难点:**  推导弦振动方程、热传导方程的推导. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| 1. **讲授弦振动方程的具体推导过程.**   **物理背景:** 有一根均匀柔软细弦, 平衡(静止)时沿直线拉紧. 除受不随时间而改变  的张力作用及弦本身的重力外, 不受其他外力.  **研究目标:** 刻画弦上任一点相对于平衡位置位移函数的变化规律.  **具体过程:**  1.建立直角坐标系: 以弦平衡时所在直线为轴, 弦的一个端点为原点,则各点位移为坐标.  2.在弦上任意选取“微元”. 此微元的位置坐标, 左端点是, 右端点是.并对其进行受力分析.  3.在轴(纵向)方向合力为, 由于弦只作横向振动, 所以    在弦振动“微小”的假设下有  则有    略去的高阶项, 有 同理也有由此可得 即弦上各点张力大小是常数.  4.在y轴(横向)方向, 即位移方向的合力为 其中  是该微元的重力.  5.近似及方程的推导. 同样由于 则      微元沿方向的加速度可近似为 微元质量为 根据牛顿运动定律有    也即    注意到    于是有    所以有    令 得到弦的运动方程    如果略去重力, 有    在教材例2传输线方程中也得到了电压满足的方程     1. **电磁场方程**   **物理背景:** 电磁学中Maxwell方程组    联立的物质方程    其中是电场强度, 是磁场强度, 是电感应强度, 是磁感应强度, 是传导电流的面密度, 是电荷的体密度. 另外, 是物理常数.  **研究目标:** 得到单个物理量满足的方程.  **具体过程:**  1.在Maxwell方程组中的第一个两端作用旋度, 并应用相应的物质方程, 有    2.注意到  而  且 所以可得到满足的方程    3.同理, 可得到满足的方程    4.如果介质不导电, 即 则上述两个方程可化为    5.在三维空间中, 梯度算子 则    称为Laplace算子. 若记常数 则前面的方程也可表示为     1. 在前面两个例题所推导出的方程中, 未知函数分别有2个和4个自变量, 其   中一个是时间变量, 另外1个或3个是空间变量. 方程中都含有未知函数关于时间和空间变量的二阶偏导. 这是波动方程的识别条件. 方程的未知函数中, 如果只有1个空间变量, 则称方程是一维波动方程; 以此类推, 如果有3个空间变量, 则称为三维波动方程, 另外, 也有二维波动方程.  方程中与未知函数无关的项, 如    中的项, 称为自由项. 含有自由项的方程, 称为非齐次方程; 不含自由项, 或自由项恒为零的方程, 称为齐次方程. 如三维齐次波动方程可写成    这些都是最简单的数学物理方程.   1. 在三维波动方程中, 如果未知函数最终不随时间的改变而变化, 也就是通常   所说的稳态, 则 这时方程写成  或  称为Laplace 方程. 而称非齐次方程    为Poisson方程.   1. **热传导方程的推导**   **物理背景:** 一块均匀且各向同性的导热体, 由于内部各点温度有差异, 因此会产生热传导现象. 导热体内部各点的温度会随着时间的变化而改变.  **研究目标:** 导出物体内温度函数满足的方程, 由此研究物体内温度的分布规律.  **具体过程:**  1.选取微元: 在物体内任意取一个微小的光滑闭曲面, 它所包围的区域记作假设在时刻区域内点的温度为 是曲面元的单位外法向.  2.Fourier实验定律: 传热学中的Fourier实验定律表明, 物体在无穷小时间段内, 通过一个无穷小面积的热量与时间, 曲面面积, 及物体温度沿曲面的法线方向的方向导数成正比, 即    其中是物体的热传导系数, 当物体为均匀且各向同性的导热体时, 为常数.  3.等量关系: 从时刻到 通过曲面流入区域的全部热量为    流入热量使内各点温度在时间段内从改变为则此温度改变所需的热量为    其中为物体的比热, 为物体密度, 对于均匀且各向同性的物体来说,  都是常数.  由热量守恒可知    4.方程推导: 注意到 根据曲面积分的Gauss公式, 有    而 , 因此有    由时间段和区域选取的任意性, 有    令 , 由此得到三维空间中无热源的齐次热传导方程    即三维热传导方程.  若物体内有强度为的热源, 则相应的方程为    其中 这是非齐次的热传导方程.  另外, 也有一维和二维的热传导方程    而且, 如果所考虑物体达到恒温状态, 则温度函数与时间无关,  则由二维和三维的热传导方程也可以得到Laplace方程. | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 习题一，P17, 5 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材：P1-11 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第二讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 定解条件及定解问题 | 2/2 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解提出定解条件的背景  二、了解一些定解条件的具体推导过程及提法  三、了解方程定解问题的提法 | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、提出定解条件的必要性;  二、一些典型定解条件的推导过程及提法;  三、方程定解问题的提法及主要类型.  **重点:**  典型定解问题的提法  **难点:**  具体定解条件的推导 | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| 1. **提出方程定解条件的必要性**   研究数学物理方程的目的是通过理论推导和数学演算, 得到刻画物理过程和物理  现象的函数表达式. 因此, 课程最基本的任务是求解数学物理方程, 而且求出的解  必须要符合物理现实. 物理过程或状态一定是唯一的, 自然要求有物理意义的解也  必须是唯一的. 但是, 如果只是从方程出发, 一般可以得到无数多个解. 例如任意函数    其中是任意常数, 都满足齐次一维波动方程因此可以看  成方程的解. 这样的解是任意的, 有无穷多, 所以没有实际意义.  实际上, 一个现象的发生, 或一个过程的发展, 除了有它内在的规律以外,  也是有条件的. 所以, 在方程的基础上, 也还有相应的进一步确定解的条件, 称为方程的定解条件.   1. **方程的定解条件**   提出的定解条件应该能够用来说明某一具体物理现象的初始状态或者边界上的约  束情况. 用以说明初始状态的条件称为初始条件; 用以说明边界上的约束情况的条件称为边界条件.  1.初始条件: 只有未知函数与时间有关的方程才有初始条件, 因此, 描述恒稳状态的Poisson方程和 Laplace不提初始条件. 未知函数与时间有关的方程称为发展型方程. 发展型方程的初始条件的个数与该方程中出现的未知函数最高阶时间偏导的阶数一致.  1.1弦振动问题的初始条件: 若以分别表示开始时刻弦上各点的初始位移和初始速度, 则初始条件可以表达为    1.2热传导方程初始条件: 若以表示开始时刻物体内任一点处的初始温度, 则初始条件表达为    2.边界条件: 只有当考虑物体有有限边界时才有边界条件, 如果考虑的物体是无限大, 没有有限边界, 则相应的方程也没有边界条件. 这种情况在第三章时就会见到.   * 1. 弦振动问题的边界条件: 弦在振动时, 其一个端点所受的约束情况, 通常有以下   三种类型, 相应的也有三种类型的边界条件.  第一, 固定端. 弦在振动过程中端点始终保持不动, 则相应的边界条件为    第二, 自由端. 弦在振动过程中端点不受位移方向的外力, 因此这个端点在位移方向(坐标系中与轴垂直的方向)的张力应该为零, 则相应的边界条件为    也即  第三, 弹性支承端. 设弹性支承原来的位置为 则表示弹性支承的应变,  由Hooke定律可知, 这时弦在该点处沿位移方向的张力应该等于弹性变形力即  或    其中为弹性体的弹性系数,   * 1. 热传导问题的边界条件:  1. 边界条件的数学分类:   3.1第一类边界条件: 在边界上直接给出未知函数的数值, 即     * 1. 第二类边界条件: 在边界上给出了未知函数沿法线方向的方向导数, 即     3.3第三类边界条件: 在边界上给出了未知函数及其沿外法线方向的方向导数的某个线性组合值, 即    4.齐次与非齐次边界条件: 对于三种类型的边界条件, 当右端的自由项恒为零时, 称为齐次边界条件, 如    不恒为零时, 称为非齐次边界条件, 如     1. **定解问题** 2. 古典解: 如果一个函数具有某偏微分方程中所含有的各阶连续偏导数, 并且代入该方程中能够使方程变成恒等式, 则称此函数是方程的古典解, 简称为方程的解. 3. 定解问题: 初始条件和边界条件统称为定解条件. 把某个偏微分方程和相应的定解条件结合在一起, 就构成了一个定解问题. 4. 初值问题: 只有初值条件, 没有边界条件的定解问题成为初值问题. 5. 边值问题: 没有初值条件, 只有边界条件的定解问题成为边值问题. 6. 初边值问题: 既有初值条件, 也有边界条件的定解问题成为初边值问题. | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 习题一，P17，1，3 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材P11-17 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第三讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 分离变量法(1) | 2/3 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、掌握应用分离变量法求解有界弦的自由振动问题的步骤和方法;  二、掌握应用分离变量法求解有限长杆上的热传导问题的步骤和方法; | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、应用分离变量法求解有界弦的自由振动问题;  二、特征方程, 特征值, 特征函数等相关概念;  三、应用分离变量法求解有限长杆上的热传导问题.  **重点:**  应用分离变量法求解特定方程定解问题的步骤和方法.  **难点:**  应用分离变量法求解方程定解问题的步骤. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| 1. **有界弦自由振动问题的分离变量法求解.**   **基本思想:** 通过未知多元函数自变量的分离, 化偏微分方程为更容易求解的常微分方程.  **目标:** 求解齐次方程, 齐次边界条件波动方程的初边值问题  .  **具体过程:**  1.分离变量，得到特征值问题: 令 代入方程(2.1), 有    要求的是非平凡解, 即 在上式两端同时除以 得到    (2.4)两端分别是和的函数, 等式要成立, 只能两端函数都等于同一个常数. 设此常数为 则有    把 代入齐次边界条件(2.2), 得到    同样由于 由上式可得    与(2.6)构成特征值问题    2.求解特征值问题: 二阶齐次常系数常微分方程(2.6) 的特征方程为    其根有三种情形.  当时, 有一对特征等根 此时(2.6)的通解    由定解条件(2.7)可得 则通解 不符合要求, 舍去.  当时, 有相异两实特征根 此时(2.6)的通解    由定解条件(2.7)可得    由此解得 则通解 也不符合要求, 舍去.  当时, 有一对共轭复特征根 令 则(2.6)的通解    由定解条件(2.7)可得    在上式中如果 则最终只能得到平凡解, 为此,  则只能有    注意到 由此可得    现在得到特征值    把特征值代入通解, 得到特征函数系    3.求解函数 : 把特征值(2.8)代入方程(2.5), 有    这个二阶常微分方程的通解为    特解: 由(2.9)和(2.10)得到满足方程(2.1)和边界条件(2.2)的特解    定解问题的级数解(形式解): 由于方程(2.1)和边界条件(2.2)是齐次的, 特解(2.11)满足叠加性, 即    也满足方程(2.1)和边界条件(2.2).  现在要求(2.12) 满足初值条件(2.3), 由此确定(2.12)中的任意常数首先在(2.12)两端令 有    (2.12)两端关于求导, 且右端级数逐项求导得    在上式两端令 则有    4.特征函数系的正交性及其应用: 为了能够从(2.13)和(2.14)中确定常数必须要利用特征函数系(2.9)的正交性:    在(2.13)两端同乘以 然后关于在积分, 级数端逐项积分,  得到    对于上式左端, 根据特征函数系的正交性, 有    由此得到    所以有系数    类似地, 在(2.14)两端同乘以 然后关于在积分, 级数端逐项积分, 得到    对于上式左端, 根据特征函数系的正交性, 有    由此得到    所以有系数      把系数(2.15)和(2.16)代入级数解(2.12), 得到确定的级数解      二、**有限长杆上的热传导问题的分离变量法求解.**  **目标:** 求解齐次方程, 齐次边界条件热传导方程的初边值问题    **具体过程:**  1.分离变量, 得到特征值问题: 令 代入方程(2.18), 有    要求的是非平凡解, 即 在上式两端同时除以 得到    上式两端分别是和的函数, 等式要成立, 只能两端函数都等于同一个常数. 设此常数为 则有    把 代入齐次边界条件(2.19), 得到    同样由于 由上式可得    与(2.22)构成特征值问题    2.求解特征值问题: 二阶齐次常系数常微分方程(2.22) 的特征方程为    其根有三种情形.  当时, 有一对特征等根 此时(2.22)的通解    由定解条件(2.23)可得 则通解 不符合要求, 舍去.  当时, 有相异两实特征根 此时(2.22)的通解    由定解条件(2.23)可得    由此解得 则通解 也不符合要求, 舍去.  当时, 有一对共轭复特征根 令 则(2.22)的通解    由定解条件(2.23)可得    在上式中如果 则最终只能得到平凡解, 为此,  则只能有    把方程(2.24)改写成    其中 由此可知, (2.25)有无穷多个正根, 由小到大依次表示为    于是得到特征值问题的无穷多个特征值    以及特征函数系    3. 求解函数 : 把特征值代入方程(2.21), 有    这个一阶常微分方程的通解为    4.特解: 由(2.26)和(2.27)得到满足方程(2.18)和边界条件(2.19)的特解    5.定解问题的级数解(形式解): 由于方程(2.18)和边界条件(2.19)是齐次的, 特解(2.28)满足叠加性, 即    也满足方程(2.18)和边界条件(2.19).  现在要求(2.29) 满足初值条件(2.20), 由此确定(2.29)中的任意常数  在(2.29)两端令 有    6.特征函数系的正交性及其应用: 要从(2.30)中确定常数 必须要利用特征函数系(2.26)的正交性:    在(2.30)两端同乘以 然后关于在积分, 级数端逐项积分, 得    对于上式左端, 根据特征函数系的正交性, 有    由此得到    所以有系数    把系数(2.31)代入级数解(2.29), 得到确定的级数解 | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 习题二，P52, 3，5 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材：P18-32 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第四讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 分离变量法(2) | 2/4 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解圆域内Laplace方程求解的Poisson公式的推导过程;  二、掌握求解非齐次方程初边值问题的特征函数法; | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、应用分离变量法推导圆域内Laplace方程求解的Poisson公式;  二、非齐次方程初边值问题解的分解;  三、应用特征函数法求解非齐次方程初边值问题.  **重点:**  非齐次方程初边值问题的特征函数解法.  **难点:**  非齐次方程初边值问题的特征函数解法. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| 1. **圆域内Laplace方程的定解问题.**   **物理背景:** 一个半径为的薄圆盘, 上下两面绝热, 圆盘边缘温度分布已知, 求达到恒稳状态时圆盘内的温度分布.  **目标:** 恒稳状态时圆盘内的温度分布函数满足下列圆域内Laplace方程的定解问题    **具体过程:**  1.极坐标变换: 圆域内的定解问题适合于在极坐标系下讨论.对定解问题(2.33)和(2.34)作极坐标变换后, 可化成    另外, 根据实际意义, 还有自然条件    2.分离变量, 得到特征值问题: 为了求满足方程(2.33)及条件(2.34),(2.35), (2.36)的解. 令    代入方程(2.33), 有    即  上式两端分别是和的函数, 等式要成立, 只能两端函数都等于同一个常数. 设此常数为 则有    把 代入自然条件(2.35)及(2.36), 得到    由此得到两个常微分方程的定解问题    与    3.求解特征值问题: 定解问题(2.40)的解不具有叠加性, 因此(2.40)不能够作为特征值问题. 选取(2.39)为特征值问题, 其中二阶齐次常系数常微分方程的特征方程为    其根有三种情形.  当时, 有一对特征等根 此时方程的通解    由定解条件可得 则通解是常数.  当时, 容易知道没有满足(2.39)的解..  当时, 有一对共轭复特征根 令 则方程通解    由定解条件可得    则特征函数系    4.求解函数 : 把包括的特征值代入(2.40), 有    这是一个二阶Euler方程. 其通解为    由条件 可知 则    5.定解问题的级数解(形式解): 根据叠加原理可以得到满足方程和自然条件的级数解    为了表示方便, 这里对常数已经作了适当调整.  现在要求(2.43) 满足边界条件(2.34), 由此确定其中的任意常数  在(2.43)两端令 根据边界条件(2.34), 有    把(2.44)看成是函数的Fourier级数展开. 根据函数Fourier级数理论可得系数的计算公式    把这些系数代入(2.43), 整理后可得求解公式    6.圆域内Poisson公式的推导: 利用恒等式    可将(2.46)中的解表示为      二、**非齐次方程的求解**  **目标:** 求解非齐次方程, 齐次边界条件弦振动方程的初边值问题    **具体过程:**  **1.**解的分解: 由于方程的非齐次性, 方程的解不满足叠加原理, 所以非齐次方程的初边值问题不能够直接应用分离变量法求解. 若设    其中满足非齐次方程, 齐次边界条件和齐次初值条件的定解问题    而满足齐次方程, 齐次边界条件和非齐次初值条件的定解问题    则可以证明， (2.51)定义的函数是定解问题(2.48),(2.49),(2.50)的解. 由此得到了求解非齐次方程初边值问题的方法, 而且把(2.51)称为非齐次方程初边值问题解的分解公式.   1. 根据求解齐次方程, 齐次边界条件初边值问题的分离变量法,首先可以得到定解问题(2.53)的解     以及特征函数系  3.定解问题(2.52)的求解: 假设(2.52)具有如下形式的解    其中是待定函数. 把(2.52)方程中的自由项按特征函数系展开    其中  把(2.55)及(2.56)代入(2.52)中的方程, 整理得到    利用特征函数系的正交性, 从(2.57)可得    把(2.55)代入(2.52)的初值条件, 同样利用特征函数系的正交性, 可得    由此得到了确定待定函数的下列定解问题    4.函数的确定: 通过常微分方法可以从(2.58)解得    从而可得    5.非齐次方程初边值问题的解: 把定解问题(2.52)和(2.53)的解(2.54),(2.59)代入(2.51), 可得(2.48),(2.49),(2.50)的解 | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 习题二，P53, 9 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材：P32-41 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第五讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 非齐次边界条件问题(1) | 2/5 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、掌握非齐次边界条件定解问题的基本处理方法;  二、训练具体非齐次边界条件问题的解决方法; | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、非齐次边界条件的齐次化;  二、典型非齐次边界条件齐次化的函数变换;  **重点:**  非齐次边界条件的齐次化方法.  **难点:**  选择函数变换齐次化非齐次边界条件. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| **待解决问题:** 直接用分离变量法求解的初边值问题的方程和边界条件都是齐次  的; 用特征函数法求解的初边值问题的边界条件也是齐次的. 这表明如果边界  条件不是齐次的, 前面的方法就不能够直接应用, 而这种非齐次边界条件更具  有一般性.  **目标:** 求解下列非齐次边界条件的初边值定解问题    **具体过程:**  1.齐次化边界条件: 设    选取适当的函数使得在变换(2.63)中引入的新的未知函数的边界  条件是齐次的, 即    由此也可以给出确定函数的条件. 在这里只要    2.待定函数的选取及函数变换: 实际上, 能够满足条件(2.65)的函数有很多. 一般选取的方法是假设是的多项式, 而且总是从的较低方幂开始, 如果没有满足条件的时再升高的方幂. 总的原则是使尽量简单. 如在(2.65)中就假设    其中是待定函数. 由(2.65)可知    由此可得    所以有    则函数变换为    3.新未知函数的定解问题: 在函数变换(2.66)下, 新未知函满足的定解问题可整理为    其中      4.定解问题(2.67)的求解: 对于定解问题(2.67), 一般来说是非齐次方程的初边值问题, 这样一来, 只要应用特征函数法就可求解. 把求出的(2.67)的解 代入(2.66) 就得到了初边值问题(2.60), (2.61)和(2.62)的解. | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 习题二，P53, 10 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材：P41-49 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第六讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 非齐次边界条件问题(2) | 2/6 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 掌握一个非齐次方程, 非齐次边界条件初边值问题的完整求解步骤和方法 | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、作函数变换把非齐次边界条件的齐次化;  二、求解非齐次方程的特征函数法;  **重点:**  求解一般问题的完整步骤和方法.  **难点:**  各种方法的综合运用. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| **例1.**  非齐次方程初边值问题  (※)  的求解  **解**：第一步: 设函数分别是下列两个定解问题  （Ⅰ） （Ⅱ）  的解，则根据线性方程解的叠加原理, 原定解问题(※)的解  . (1)  第二步: 问题（Ⅰ）的求解.  设此问题的非平凡解, 代入（Ⅰ）的方程有  .  由解的非平凡性, 上式两端同除以有  .  此式左右两边分别是和的函数, 等式要成立, 则只能等于同一常数. 因此有  , (2)  . (3)  把代入（Ⅰ）的边界条件, 注意到所求解的非平凡性, 有  . (4)  而(3) 和 (4) 构成特征值下列问题:    特征值问题中微分方程的特征方程为 .   1. 当时, 特征根, 方程 (3) 的通解为   ,  其中是任意常数. 由定解条件 (4) 有  .  则, 此时是平凡解, 舍去;  ② 当时, 特征重根, 微分方程 (3) 的通解  .  由定解条件 (4) 有, 此时也是平凡解, 舍去;  ③ 当时, 特征根, 微分方程 (3) 的通解  .  由定解条件 (4) 有  和 .  为了得到非平凡解, 需, 则只能 , 由此有  .  因此得到特征值  (5)  和特征函数  , ； (6)  把特征值 (5) 代入微分方程 (2), 得到  , (7)  其特征方程为 .  当时, 特征重根, 微分方程 (7) 的通解  ;  当时, 特征根, 微分方程 (7) 的通解  .  则满足问题（Ⅰ）中方程和边界条件的特解  ,  ，.  由此得到级数解  . (8)  在 (8) 中令, 由问题（Ⅰ）的初值条件有  . (9)  在 (9) 式两端同时乘以 , 然后积分得到  . (10)  根据特征函数系的正交性:  (11)  当时有  , .  (10) 成为  因此常数 .  当 时有  , 以及 ,  其余  此时 (10) 成为 . 因此对任意有 . 所以  .  上式关于求导得  .  在上式中令, 由初值条件 有  . (12)  同样在 (12) 式两端同时乘以 , 然后积分得到  . (13)  当时有  , .  (13) 成为  因此常数.  当 时, 同样由于  , 以及 ,  其余  此时 (13) 成为 . 因此对任意有 .  故问题（Ⅰ）的解  . (14)  第三步: 问题（Ⅱ）的求解：  利用问题（Ⅰ）中的特征函数系, 设定解问题（Ⅱ）的级数解为:  , (15)  代入（Ⅱ）的微分方程和初值条件可得:  ,  .  再次利用特征函数系的正交性, 有  (16)  和  . (17)  问题 (16) 对应齐次方程的特征方程为 , 特征重根.  则相应齐次方程的通解为  .  由于是特征重根, 则设问题 (16) 中非齐次方程的一个特解为  ,  其中 是待定常数. 于是有  , .  把这些式子代入问题 (16) 的微分方程可得 . 所以 .  根据非齐次常微分方程解的结构理论, 可得问题 (16) 中微分方程的通解为  .  由 (16) 的初值条件有 .  故问题 (16) 的解为  . (18)  问题 (17) 中微分方程的特征方程为, . 特征根  , 则微分方程的通解为  .  由问题 (17) 的初值条件有. 因此问题 (17) 的解  . (19)  把 (18) 和 (19) 代入 (15) , 得到问题（Ⅱ）的解  . (20)  第四步: 把问题（Ⅰ）的解 (14) 和问题（Ⅱ）的解 (20) 代入(1) , 得到问题 (※) 的解  .  **例2:** 求解下列初边值问题    **解：**对非齐次边界值问题，作函数变换    其中是待定函数，使得新未知函数满足条件    由此可知，待定函数应满足    现设    其中是待定函数. 由应满足的条件知   则    所以函数变换为    在此函数变换下, 有    及  把这些关系式代入原方程和初始条件，得到    由此得到新定解问题    设此定解问题分离变量形式的非平凡解为 . 代入方程有  .  对非平凡解，上式可化成：  ,  此式左右两边分别是和的函数，只能等于同一常数时才能成立，由此得到两个常微分方程  , .  把分离变量非平凡解代入边界条件有, 由于 于是有    由此得到特征值问题    此方程的特征方程为 , 则   1. 当时，特征根，方程通解是   ,  由定解条件有  ,  则，此时是平凡解，应舍去；   1. 当时，特征重根, 方程通解是   ，  由定解条件有, 此时也是应舍去的平凡解；   1. 当时，特征根, 方程通解是   ,  由定解条件有  .  为了得到非平凡解，则需, 因此只能有, 由此得到 . 所以特征值问题的特征值及特征函数为  ,  ；  现在把特征值代入的微分方程得到    其特征方程为 , 当时，有特征重根, 方程通解是    当时，特征根, 方程通解是  ;  则满足定解问题方程和边界条件的特解为    , ,  由此得到满足方程和边界条件的级数解  .  由初值条件有  .  根据特征函数系的正交性，有常数 , . 因此  ，  上式关于求导得  .  由初值条件有    同样根据特征函数系的正交性，有常数,,. 所以新定解问题解为  .  由函数变换 得到原定解问题的解 | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 复习，归纳整理本章内容和方法 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材：P19-49 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第七讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| DAlembert公式 | 2/7 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解一维波动方程初值问题求解的DAlembert公式及其推导方法;  二、掌握二阶线性偏微分方程的分类方法;  三、掌握应用特征变换法求解二阶常系数偏微分方程的方法. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、一维波动方程初值问题的DAlembert公式及其推导;  二、二阶线性偏微分方程的分类;  三、求解二阶常系数偏微分方程的特征变换法.  **重点:**  应用特征变换法求解二阶常系数偏微分方程.  **难点:**  二阶常系数偏微分方程求解的特征变换法. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| 1. **一维波动方程的DAlembert公式.**   **目标:** 推导一维波动方程初值问题    的求解公式.  **具体过程:**  1.方程(3.1)的通解: 对未知函数的自变量作变换    利用复合函数求偏导的链式法则, 有      同理有    把(3.5)和(3.6)代入方程(3.1), 有    把(3.7)分别关于积分, 有    由此可得    其中是任意二次连续可微函数. (3.8)称为方程(3.1)的通解.  2.DAlembert公式: 把(3.8)代入条件(3.2),(3.3), 可得    对(3.10)积分可得    由(3.9)和(3.11)联立可解得      把上两式代入(3.8), 整理可得    (3.12)称为一维波动方程初值问题求解的DAlembert公式.     1. **二阶线性偏微分方程的分类**   1.特征方程及特征曲线: 常见的二个自变量的二阶线性偏微分方程为    其特征方程是    这个常微分方程的积分曲线称为偏微分方程(3.13) 的特征曲线. 二阶线性偏微分方程的特征曲线只与方程中的二阶导数项的系数有关, 而与其他低阶项的系数无关.  2.方程的分类: 在方程(3.14) 中, 若在某一区域内 则在此区域内称  (3.13)为椭圆型方程, Laplace方程及Poisson方程均属于椭圆型的; 若在某一区域内 则在此区域内称(3.13)为抛物型方程, 热传导方程属于抛物型的; 若在某一区域内 则在此区域内称(3.13)为双曲型方程, 波动方程双曲型的.  双曲型方程有两条不同的实特征曲线; 抛物型方程只有一条实的特征曲线; 而椭圆型方程没有实特征曲线.  三、 **定解问题的特征变换解法**  求解初值问题：  **解:** 方程的特征方程为:  ,  即: , .  由此得积分曲线:  , .  作特征变换：  , ,  则  , , ,  , .  代入原方程, 整理得:  ,  则通解为  ,  其中是任意两个连续二次可微函数. 因此原方程通解为:  .  由初值条件有:  , .  由微分方程有:. 因此  , ,.  代入通解得到所求解为:  . | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 习题三，P82, 2 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材：P56-63 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第八讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 波动方程的Poisson公式 | 2/8 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解三维波动方程Poisson公式的推导方法和过程;  二、掌握三维波动方程Poisson公式并能够简单应用;  三、了解二维波动方程初值问题的求解公式. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、三维波动方程的初值问题；  二、推导三维波动方程Poisson公式的球面平均法；  三、二维波动方程初值问题的求解公式；  **重点:**  三维波动方程Poisson公式的意义.  **难点:**  三维波动方程Poisson公式的推导. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| 1. **三维波动方程Poisson公式的推导.**   **研究目标:** 求解三维波动方程初值问题    **具体过程:**  1.球面平均函数: 函数在以点为中心, 以为半径的球面上的平均值, 即    其中是球面上点的坐标, 是以原点为中心的单位球面, 是单位球面上的面积微元, 是上的面积元素, 显然有由(3.18)可知, 若是连续的, 则有    2.满足的微分方程: 对方程(3.15) 的两端在球面所包围的球体内积分. 注意球体的中心是 球体内的点表示为 应用Gauss公式可得    其中是的外法向向量.  (3.20)左端的积分交换积分和微分运算的次序 ,并采用球面坐标表示, 有    由此得到    把上式两端关于求导, 可得    注意到上式左端      于是有    3.的确定: 由上式容易得到的通解    其中是任意二次连续可微函数.  把(3.16),(3.17)的初值函数也作球面平均, 由此可得    其中分别是在球面上的平均函数.所以有    把(3.22),(3.23)代回(3.21), 可得    4.三维波动方程Poisson公式: 首先注意到    因此可以把拓展到 并且有    即是的偶函数. 同理, 也是偶函数.  对(3.24)应用L’Hospital法则求极限, 注意到(3.19)， 可得    根据球面平均函数的定义(3.18)， 有    由此得到三维波动方程的Poisson公式     1. **二维波动方程初值问题的求解公式**   二维波动方程初值问题    根据三维波动方程的Poisson公式, 利用降维法可得    其中是平面上以为中心, 为半径的圆面. | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 习题三，P82 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材：P63-72 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第九讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| 方程的积分变换解法 | 2/9 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、掌握应用积分变换求解热传导方程初值问题的方法;  二、掌握应用积分变换求解波动方程初值问题的方法;. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、积分变换法求解热传导方程初值问题;  二、积分变换法求解波动方程初值问题.  **重点:**  积分变换法求解偏微分方程定解问题.  **难点:**  积分变换法求解偏微分方程定解问题.. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| 1. **无界杆上的热传导问题**   设有一根无限长的杆, 杆上具有强度为的热源, 杆的初始温度为求时杆上的温度分布规律.  **解:** 杆上的温度分布函数满足下列定解问题    其中  应用Fourier变换求解上述非齐次方程的初值问题.  1.对初值问题的方程和初值条件关于变量作Fourier变换: 记    根据Fourier变换的微分性质, 则有    2.初值问题(3.31)的求解: 根据一阶线性常微分方程的常数变易法可得(3.31)的解    3.对(3.32)作Fourier逆变换: 可得    根据Fourier变换的卷积公式, 有    查表可得    根据函数卷积的定义, 有      由此得到定解问题的解     1. **求解初值问题**     **解:** 记函数关于变量的变换为  .  对方程和初值条件作变换，并利用变换微分性质，有    (3.36) 中齐次微分方程的特征方程为, 特征值, 则齐次微分方程通解为  .  设非齐次微分方程的一个特解为 , 其中是待定常数. 代入原微分方程得  所以微分方程的通解为    由初值条件有常数    由初值条件有常数    所以最后有    根据变换的定义有          .  根据逆变换的定义，最终得到初值问题的解 | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 习题三，P83,8 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材：P72-81 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第十讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| Laplace方程的相关问题 | 2/10 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解三维Laplace方程边值问题的提法;  二、了解调和函数的积分表达式的推导过程及方法;  三、了解调和函数的积分表达式的简单应用. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**  一、 三维Laplace方程的边值问题；  二、 调和函数;  三、 Green公式；  四、 调和函数的积分表达式；  **重点:**  调和函数的积分表达式.  **难点:**  调和函数的积分表达式. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| 1. **Laplace方程边值问题.**   1.三维空间中的Laplace方程    具有二阶连续偏导的解, 称为调和函数.  2.在空间中某一区域的边界上给定了连续函数 要求一个函数满足定解问题    称 (4.1)为Laplace方程的第一边值问题, 也称为Dirichlet问题.  3.在空间中某一区域的光滑边界上给定了连续函数 要求一个函数满足定解问题    称 (4.2)为Laplace方程的第二边值问题, 也称为Neumann问题.   1. **Green公式**   1.Gauss公式：设是三维空间中以足够光滑曲面为边界的有界区域,  是在上连续, 在内具有一阶连续偏导的函数, 则有Gauss公式    其中是体积元素, 是的单位外法向量, 是上的面积元素.  2.Green公式: 设函数和在上具有一阶连续偏导, 在内具有二阶连续偏导, 在(4.3)中令    则有    即    (4.4)称为第一Green公式.  在(4.4)中交换函数的位置, 有    把(4.4)和(4.5)相减可得第二Green公式     1. **调和函数的积分表达式:**     其中  四、 **调和函数的积分表达式的简单应用:** | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 习题四，P99, 2 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材：P84-92 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第十一讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| Green函数法 | 2/11 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解Green函数的意义和概念;  二、了解半空间Green函数的应用;  三、了解球域Green函数的应用. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**   1. Green函数；   二、 半空间Dirichlet问题;  三、 球域Dirichlet问题.  **重点:**  两种特殊区域Dirichlet问题的Green函数法求解.  **难点:**  两种特殊区域Dirichlet问题求解的Green函数法. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| 1. **Green函数.** 2. Green函数的意义: 3. Green的概念: 在Green公式(4.6)中取是内的调和函数, 则有     把(4.9)与(4.10)相减, 得到    选取调和函数满足条件    则有    称    为Laplace方程的Green函数, 从而有     1. Green函数的求法: 在特定区域内求解Dirichlet问题     可以得到这个区域内的Green函数.   1. **半空间的Green函数** 2. 半空间内Laplace方程的Dirichlet问题      1. 半空间内的Green函数: 设是半空间内的点, 是关于平面的对称点. 则     是半空间的Green函数.   1. (4.16)的求解公式   半空间的边界平面的外法向是轴的负向, 所以有    代入(4.17), 得到(4.16)的解     1. **球域的Green函数:** 2. 球域的球心在原点, 半径为 球面是 其内Laplace方程的Dirichlet问题      1. 球内点 球外点是关于球面的反演点:  则     是球域的Green函数.   1. (4.19)的求解公式     也称为球的Poisson公式. | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 习题四，P100,5 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材：P92-99 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第十二讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| Bessel方程及其求解 | 2/12 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解Bessel方程的引出过程;  二、了解Bessel方程的求解方法;  三、掌握Bessel方程的通解. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**   1. Bessel方程；   二、 Bessel方程的求解;  三、 Bessel函数.  **重点:**  Bessel方程的通解.  **难点:**  Bessel方程的通解. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| 1. **Bessel方程的引出.**   1.圆盘内温度分布问题: 设有半径为的薄圆盘, 其侧面绝缘, 圆盘边界上的温度恒保持为零摄氏度, 且初始温度已知. 则圆盘内瞬时温度分布函数满足定解问题    2.Helmholtz方程: 用分离变量法求解该问题, 令    代入方程(5.1)得    上式两端同除以可得    由此得到函数和满足的方程    从(5.4)得    由此可知, 若 则当时这不符合实际意义. 而否则是  恒稳状态. 所以必须有 方程(5.5)称为Helmholtz方程.  3.Bessel方程: 由(5.3)知, Helmholtz方程满足的条件是    采用极坐标系可把方程(5.5)和条件(5.6)化成    令(5.7)中的 代入计算, 整理得    由于是单值函数, 所以也是单值得, 则应该是以 为周期的周期函数, 由此按照第二章推导圆域内Laplace方程的Poisson公式中的方法, 可得常数    由此得到    及    (5.7)即是阶Bessel方程.  4.Bessel方程的常见形式: 作代换  并记  则由(5.11), 经计算可得阶Bessel方程的常见形式    由条件(5.8)及温度是有限的, 可以得到下列自然条件    这样, 原定解问题的求解就归结为求Bessel方程(5.11)在自然条件(5.12)下的特征值与特征函数.   1. **Bessel方程的通解**   1.阶Bessel方程的级数解: 设阶Bessel方程为    其中可以是任意实数或复数. 这里只讨论为实数且先假设 可以证明,  方程(5.13)存在如下形式的级数解    其中常数和待定.  2.级数解中常数的确定: 把(5.14)代入方程(5.7), 通过计算整理有    是任意非零常数. 一般取    由此有    3.第一类Bessel函数: 把(5.15)代入(5.14), 得到(5.13)的一个特解    由级数敛散性的判别准则可知, 上述级数在整个数轴上收敛, 因此级数确定了上  的一个函数, 称为阶第一类Bessel函数, 记作    实际上, 在时, (5.16) 也成立.  当是非负整数时, 则有    4.第二类Bessel函数: Bessel方程(5.13)是二阶齐次线性常微分方程. 根据该类型常微分方程的结构理论可知, 方程的通解可以表示成两个线性无关特解的线性组合. 在前面已经得到了方程(5.13)的一个特解. 容易证明, 当非整数时, 方程(5.13)的两个特解和线性无关. 但是, 当是整数时, 容易证明, 方程(5.13)的两个特解和线性相关.  一般定义阶第二类Bessel函数,当非整数时,    当是整数时,    可以证明, 上述定义的第二类Bessel函数确实是Bessel方程的解, 与线性无  关, 而且当时, 为无穷大.  5.Bessel方程的通解: Bessel方程(5.13)有了第一类Bessel函数和第二类Bessel函数两个线性无关的特解以后, 阶Bessel方程的通解表示为    其中 是任意常数, 为任意实数. | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 习题五，P127, 2 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材：P101-109 | | |
| **第十三讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| Bessel函数的性质 | 2/13 | 2014-15/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、掌握Bessel函数的递推公式;  二、了解Bessel函数零点的性质;  三、掌握Bessel函数的正交性及应用. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**   1. Bessel函数的递推公式；   二、 Bessel函数零点;  三、 Bessel函数正交性;  四、 函数按Bessel函数的展开.  **重点:**  函数按Bessel函数的展开.  **难点:**  Bessel函数正交性. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| 1. **阶第一类Bessel函数的递推公式.**   根据Bessel函数的性质特点, 在实际应用中用得较多的是第一类Bessel函数, 因此这里只推导一类Bessel函数的递推公式. 在    两端同乘以 然后求导, 得到    即  同理可得    把(5.21)和(5.22)化简整理后还可以得到     1. **Bessel函数的零点**   **1.**Bessel方程特征值问题: 在讨论圆盘温度分布问题时的Bessel方程特征值问题    把方程(5.25)化成Bessel方程的常见形式后, 根据Bessel方程的通解公式, 有    其中是任意常数.  由于第二类Bessel函数在时的值为无穷大, 则有条件(5.27)可知, 在上述通解中 即    由条件(5.26)有  所以特征值由Bessel函数的零点确定.  2.Bessel函数零点的性质:   1. **特征值及特征函数**   1.特征值及特征函数: Bessel函数的零点由小到大依次为    则特征值问题(5.25), (5.26) 和(5.27) 的特征值是    相应的特征函数是    2.Bessel函数的正交性: Bessel函数系是特征值问题(5.25), (5.26) 和(5.27) 的特征函数系. 可以证明    而且有  3.函数按Bessel函数系展开: 任意在上具有一阶连续导数及至少分段连续的二阶导数的函数 只要在处有界, 在处等于零, 则必能展开成如下绝对且一致收敛的级数    其中系数 | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 习题五，P127, 4， 5， 7 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材：P109-117 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第十四讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| Bessel函数的应用 | 2/14 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、梳理, 总结Bessel函数的相关理论;  二、掌握应用Bessel函数相关理论解决实际问题的方法. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**   1. 圆盘温度分布规律;   二、 初边值问题;  三、 函数按Bessel函数展开.  **重点:**  Bessel函数的应用.  **难点:**  Bessel函数的应用. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| 求解定解问题:  **解**： 令, 代入方程得  .  由此有 ,  此式成立, 只能等式两边等于同一常数, 因此有   1. , ⑵ .   当时, 方程⑴的通解为  .  在时, , 这与边界条件不符, 因此. 令, 此时方程⑴的通解为  ,  ,  , .  方程⑵是阶方程, 通解为  .  由于第二类函数的值在时是无穷. 由的有界性知, 常数  . 因此  .  由问题的边界条件知 , 则有  或 .  当时, 由于, 原方程的一个特解  .  当时, 由公式有 , 即是第一类函数  的零点. 记是的正零点, 则  ,  由此可以得到  , ,  从而可以得到满足方程和边界条件的特解  .  根据齐次线性方程的叠加原理可得形式解  .  由初值条件有  (3) , (4) .  由(3)容易得  ,  在(4)的两边同乘以并对在积分. 记, 注意到, 根据第一类函数的递推公式有        .  所以  ,  由此得到 .  同样有  .  根据函数的正交性有  .  仍然记, 则有  .  由前述可知, . 注意到  , ,  根据函数的递推公式有              .  所以得到  .  由此得到定解问题的解为 | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 习题五，P128,19 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材：P117-122 | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **第十五讲** | **课时/课次:** | **教学日期（学年/学期）** |
| Legendre多项式 | 2/15 | 2015-16/2 |
| **教学目标** | | |
| 一、了解Legendre方程的导出过程;  二、掌握Legendre方程通解的表达式;  三、掌握Legendre多项式的重要性质及函数展成Legendre多项式:  四、了解Legendre多项式的简单应用. | | |
| **教学内容** | | |
| **知识点：**   1. Legendre方程；   二、 Legendre方程通解表达式;  三、 Legendre多项式正交性及函数展成Legendre多项式;  四、 Legendre多项式简单应用.  **重点:**  Legendre多项式的应用.  **难点:**  Legendre多项式的应用. | | |
| **教学过程及教学方法** | | |
| 1. **Legendre方程的导出.**   在球坐标系下用分离变量法求解Laplace方程时, 最终归结为下列齐次非常系的线性常微分方程    其中为任意实数, 但一般取为整数. 方程(6.1)称为Legendre方程.一些定解问题的解决归结为Legendre方程的特征值与特征函数.   1. **Legendre方程通解表达式**   1.Legendre方程一般写成    根据常微分方程理论可知, 方程(6.2) 有两个线性无关的特解, 使得方程的通解可以写成这两个特解的线性组合.  2.方程(6.2)有级数解, 设为    其中常数和待定. 把(6.3)代入方程(6.2), 通过计算整理, 最终有通解    其中是任意常数. 函数    是方程(6.3)在内的两个线性无关的特解.   1. **Legendre多项式正交性及函数展开**   1.可以证明, 在(6.5)和 (6.6)的两个函数中, 不论是奇数还是偶数, 其中总有一个是多项式. 统一写成    其中  这个多项式称为Legendre多项式.  Legendre多项式可以写成    的形式, 称为Legendre多项式的Rodrigues表达式.  2.在是整数时, (6.5)和 (6.6)中有一个是Legendre多项式, 另一个是无穷级数, 记作 此时方程(6.3)的通解为    其中称为第二类Legendre函数, 它在上是无界的.  3.Legendre多项式的正交性:    4.函数按Legendre多项式展开: 函数满足展开条件时, 有    其中系数    四、**Legendre多项式的应用** | | |
| **作业安排及课后反思** | | |
| 习题六，P5, 10 | | |
| **本讲参考资料** | | |
| 本课程使用教材：P130-145 | | |

# 8．课程要求

8.1学生自学的要求：

1．根据课程进度, 可在课前预习即将讲授的内容

2．根据自己数学基础情况, 结合预习,提前复习、熟悉课程会涉及到的以前基础知识.

3. 课后回顾课堂所讲内容,归纳整理重要知识点、重要概念和方法.

8.2课外阅读的要求：

多看老师指定参考书籍，积极思考课堂布置的课外思考题。

8.3课堂讨论的要求

积极思考，积极提问，积极回答

# 9．课程考核方式及评分规程

9.1出勤（迟到、早退等）、作业、报告等的要求：

出勤：缺一次扣平时成绩3分,迟到、早退扣平时成绩2分，事假扣平时成绩1分。

作业：全批全改，用A、A-、B、B-四个等级，分别表示90-100、80-89、70-79和60-69。

9.2成绩的构成与评分规则说明：

没有期中考试时：平时成绩占40%，期末卷面成绩占60%折算成学科成绩。

有期中考试时：平时成绩占30%，期中卷面成绩占30%，期末卷面成绩占40%折算成学科成绩。

9.3考试形式及说明（含补考）

平时以出勤和作业为主，期末卷面分A、B卷，难度相当，题型与分值相同，重复率不超过15%，任选一套作期末试卷，另一套作补考试卷

# 10．学术诚信规定

10.1考试违规与作弊

严格遵守并执行学校《学生手册》

10.2学术剽窃等

遵守知识产权，除非教师有特别要求，否则所有的作业、论文等都应学生自己完成。

# 11．课堂规范

11.1课堂纪律

遵守学校学生手册和行为规范。

11.2课堂礼仪

课堂教学是人才培养的重要环节，课堂是大学生接受教育的神圣殿堂。良好的课堂行为规范，是大学生素质的重要体现，是大学生良好精神风貌的重要体现，是高校学风建设的关键。

（1）学生认真完成每次课的各个教学环节，至少提前十分钟到达上课地点；

（2）学生应自觉遵守和维护课堂纪律，上课期间应关闭手机、MP3等通讯和娱乐设备；禁止在教室内及附近大声喧哗；

（3）为保证一个清新的课堂教学环境，不得携带食物、饮料等进入课堂食用，不得在教室内吸烟；

（4）学生在课堂上应举止言行得体，不得有不文明的言语和举动；男女同学之间交往应得体，不得在课堂内表现出不雅言行；

（5）学生在课堂上应尊重老师，未经老师许可，不得随意进出教室或做出其他不雅举止，课间值日生应主动为老师擦黑板；

（6）为保持清洁的教学环境，学生应自觉维护教室内及走廊卫生，不得在课桌、教室墙壁等处涂抹刻画，不得在教室及走廊随地吐痰或乱扔杂物；

（7）学生应保持良好的个人形象，自觉遵守作息时间，保证上课精力充沛、精神饱满，禁止上课睡觉；课堂着装应得体，不得穿拖鞋、背心上课，不宜过度暴露。

（8）学生应根据课程教学安排认真完成课前预习、课堂笔记、课后作业。课堂上应积极参与讨论，认真回答问题，不做与课堂教学无关的事情。

（9）严格按课程表出勤，不迟到，不早退。认真对待教师课堂考勤，答到时应举手示意，声音响亮，不得替他人答到。

（10）不得旷课，因病因事不能正常出勤者应履行有关请假手续.

# 12．教学合约 我已阅读此课程实施大纲，理解其含义，并会遵照其中的要求和规定

# 完成课程。     学生签字\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_